This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910537 1

Louis Osterdinger
im Haers 1824.

CHRIST. FRIEDR. PFLEIDERERS,

WEIL. PROFESSORS DER MATHEMATIK UND PHYSIK AUF DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN,

SCHOLIEN

ZUM

ERSTEN BUCHE

VON

EUCLID'S ELEMENTEN,

AUS

PFLEIDERER'S GEDRUCKTEN UND HANDSCHRIFTLICHEN NACHLÄSSEN ZUSAMMENGESTELLT, UND GRÖSSTENTHEILS NEU BEARBEITET

VON

C. F. HAUBER

EPHORUS IN MAULBRONN.

STUTTGART,

IM VERLAG DER J. B. METZLER'SCHEN BUCHHANDLUNG.

1827.

Geometry 1827
(F.9)

SCHOLIEN

ZU

EUCLID'S ELEMENTEN,

AUS

CHRIST. FRIEDR. PFLEIDERERS,

WEIL. PROFESSORS DER MATHEMATIK UND PHYSIK AUF DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN,

GEDRUCKTEN ACADEMISCHEN SCHRIFTEN

UND

HANDSCHRIFTLICHEN NACHLASSEN

ZUSAMMENGESTELLT.

ERSTES HEFT.

SCHOLIEN ZUM ERSTEN BUCH DER ELEMENTE.

STUTTGART,

IM VERLAG DER J. B. METZLER'SCHEN BUCHHANDLUNG.

1827.

Vorwort.

Ich habe in dem Winterhalbjahr 1824—25 die von dem verstorbenen Professor Pfleiderer in Tübingen zum Behuf oder auf Veranlassung seiner Vorlesungen aufgesetzten Anmerkungen über die Definitionen, Postulate, Axiome und 26 ersten Sätze des Ersten Buchs der Euklidischen Elemente, wovon ein Theil von ihm so in Ordnung gebracht war, wie er in meiner Chrestomathia geometrica pag. 279—323. abgedruckt steht, anderes auf einzelnen Blättern geschrieben war, in Verbindung mit mehrerem, was ich selbst vor einigen Jahren bei Gelegenheit des am Seminar zu Schönthal zu gebenden Unterrichts über das I. Buch der Elemente niedergeschrieben hatte, so zusammengestellt, wie es hier gedruckt erscheint. Und da bei einer gleich ausführlichen Behandlung der auf den 26sten folgenden Sätze des I. B. das Werk eine gröfsere Ausdehnung bekommen hätte, als den Absichten der Verlagshandlung gemäfs war; so habe ich über die weiteren Sätze vom 27sten an nur die summarischen Anmerkungen von Pfleiderer folgen lassen, welche eine Fortsetzung derjenigen sind, die in der Chrestomathia geometrica pag. 299—323. stehen.

Dafs die Ausführlichkeit in diesen Dingen nicht in jedermanns Geschmack sey, davon gibt ein Beispiel dasjenige, was über Savilii Praelectiones

tresdecim in principium Elementorum Euclidis, Oxonii habitae 1620, Mallebranche in seiner Recherche de la vérité Liv. II. part. II. Chap. 6. äuſserte; ferner, was nach Wallis Citation in seiner Algebra Cap. LIII. Prestet in der zweiten Ausgabe seiner Elem. mathemat. über ebendieselbe Praelectiones urtheilte: «es «könne bloſs von einer Befangenheit und Ueber- «schätzung des Werths von Euklid herrühren, daſs «Savilius so viel Mühe auf diese Sache, als eine «schwere, habe wenden wollen, da diese Dinge doch «nicht so schwer zu verstehen seyen; indem ein «Mann von mittelmäſsigen Talenten, entweder für «sich selbst, oder mit Hülfe eines Geometers, diese «Definitionen, Axiome, Postulate und 8 Sätze im «Zeitraum einer einzigen Stunde würde verstehen «können, ohne daſs es eines solchen Apparats dazu «bedürfte.» Wallis a. a. O. erwiedert hierauf: «So seyen auch die Worte: Alles, was ihr «wollt, daſs euch die Leute thun, das thut «ihr ihnen, ein kurzer und für sich verständ- «licher Text; und doch könne eine, ja mehrere «lange Predigten darüber gehalten werden, welche «deſswegen nicht lächerlich seyen, wenn sie nur «gesunde, zweckmäſsige und zu wissen nützliche «Gedanken enthalten. So habe nun Savilius über «Euklides überhaupt, über seine Elemente insbe- «sondere; über das, was die Mathematiker unter «Definitionen, Postulaten, Axiomen verstehen, wozu «sie dienen, und warum sie vorangeschickt werden; «über die 35 Definitionen, 5 Postulate und 9 Axiome

„insbesondere; über die Sätze im Allgemeinen, die „Lehrsätze und Aufgaben und deren Unterschied; „über die Erfordernisse des Beweises der Lehrsätze, „und der Construction der Aufgaben; endlich über „die 8 ersten Sätze insbesondere, Dinge vorgetra„gen, an die nicht jedermann von selber denke, „und die doch sehr bemerkenswerth seyen; und „habe dabei hin und wieder aus dem Schatz einer „tiefen Gelehrsamkeit manche interessante, ange„nehme und nützliche Bemerkungen beigebracht, die „nichts als gesunde, gründliche und auf anständige „Art vorgetragene Gedanken enthalten; was gewifs „vielmehr Lob als Spott verdiene."

Wir wollen nicht behaupten, dafs alles, was in den hier erscheinenden Anmerkungen vorgetragen wird, zum Verstehen und Studiren der Elemente nothwendig, oder dafs alles in gleichem Grade nützlich und anwendbar sey. Nothwendig sind die Ergänzungen der Beweise des Textes von Satz 7. 22. 24. in §. 98. 219. 243 und 244., weil ohne sie diese Beweise unvollständig wären. Zur Erklärung der Aussagen der Sätze im Texte dienen §. 96. 103. 136. 185. 196. 260. in Beziehung auf Satz 7. 8. 13. 18. 19. 26.; wobei hie und da auch über die Gründe der Ausdrücke und sonst über einzelnes im Euklidischen Sprachgebrauch etwas bemerkt wird; letzteres auch in §. 110. 121. 123. 154. 160. Vorzüglich schien der Berücksichtigung werth, was zur Bildung des Erfindungs-Vermögens dienen kann; man hat sich defswegen häufig bei der Betrachtung der Art und Weise aufgehalten,

wie man bei Erforschung der Lehrsätze und Aufgaben verfahren, und zur Auffindung der Wahrheiten von jenen und der Auflösung von diesen gelangen könne; namentlich §. 96. 164. in Beziehung auf die Lehrsätze in Satz 7 u. 8. 16., und §§. 2—6. 29 und 34. 106. 116. 133. 227. 235. in Beziehung auf die Aufgaben der Sätze 1. 2. und 3. 9. 10. 11. 12. 22. 23.

Auf den ebenfalls interessanten und zur höheren wissenschaftlichen Bildung gehörigen Gesichtspunkt, da man das System in seinem Entstehen betrachtet, und den Gründen des Urhebers desselben bei seinem Verfahren in solchen Fällen nachdenkt, wo etwas auch anders gemacht werden konnte und eine Wahl Statt hatte, beziehen sich: Andere Ausdrücke der Sätze, andere Beweise, andere Zusammenstellung und Anordnung der Sätze; wobei zugleich durch die verschiedenen Ansichten eines Gegenstands, derselbe dem Anfänger mehr aufgehellt und mehr geläufig wird. Man findet andere Ausdrücke von den Sätzen 1. 5. 6. 7. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 26. in §. 23. 51. 75. 100. 154. 167. 173. 186. 197. 216. 221. 231. 234. 264.; andere Ausdrücke und Darstellungen der Euklidischen Constructionen und Beweise bei Satz 1. 2. 4. 5. 6. 7 und 8. 13. 14. 21. in §§. 14. 30. 43. 53. 76 und 83 und 85. 96 und 99. 136 und 137. 144 und 146. 219.; theils mit andern Wendungen, theils blofs durch Worte ohne Beziehung auf die Buchstaben einer Figur; auf welche letztere Art der ehemalige Professor Scheubel in Tübingen die

6 ersten Bücher der Elemente in seiner Ausgabe zu Basel 1550. fol., und neuerlich ein Engländer das erste Buch derselben bearbeitet hat (The first Book of Euclid's Elements of Geometry, demonstrated in general terms, by which the conception of the Learner, and of the initiated becomes clearer and more perfect. By Richard Garde, A. B. Lond. 1821.); letzteres hier namentlich bei Satz 1. 15. 17. 18. 19. in §. 14. 152. 172, 182. 193.: — Ferner von den Euklidischen verschiedene Beweise von den Sätzen 5. 6. 7. 8. 9. 15. 16. 18. 19. 20. 21. 24. 25. in §§. 54—58. 86 und 88. 99. 148. 108. 155. 166. 183 und 184. 194 und 195. 213—215. 220 und 221. 243—248. 255, 256, 258. 265 und 266. — Betrachtungen über die Möglichkeit einer von der Euklidischen verschiedenen Anordnung der Sätze sind angestellt bei Satz 1. 4. 19. 26. in §. 1. 50. 194. 262. (Vgl. §. 187. über Satz 6.).

Allgemeine Bemerkungen über einzelne Punkte der mathematischen Methode, oder einzelne Beispiele davon finden sich: in §. 11—13. über die Analysen der Aufgaben; §. 15—17 über Verwandlung der Aufgaben in Lehrsätze; §. 26. über Reduction der Aufgaben auf andere; § 10. über Determination der Aufgaben; §. 24. 25. über das Unbestimmte und das Unmögliche, das bei Aufgaben vorkommen kann; §. 26. über das Verhältniſs solcher Aufgaben, die wenigere, und solcher, die mehrere Bedingungen haben; §. 32. über den Grund, warum einzelne sehr leichte Aufgaben als solche, nicht als Postulate stehen; §. 33. über das Mögliche der Be-

seiner Abhandlung De angulo contactus Cap. I.*) steht.

In Absicht auf meine zwei im Folgenden mehrmals citirte Schriften, Chrestomathia geometrica, Tübingae 1821, und Scholae logico-mathematicae bemerke ich, dafs erstere in der Cottaischen Buchhandlung in Stuttgart erschienen, und durch alle Buchhandlungen Deutschlands zu beziehen ist; die zweite aber, die in Reutlingen herauskommen sollte, in Folge unerwarteter Hindernisse bis jetzt erst zur Hälfte abgedruckt ist, ohnerachtet das Manuscript schon vor drei Jahren fertig abgegeben war.

Maulbronn, den 3. Dec. 1826.

Haubert.

„tam propter se ipsam, sed ut Lemma ad ulteriores usus. Et „ob eam causam non omne illud hic dicit, quod dici „potuisset, sed tantumdem et in tali forma, ut aptis„sime posset ad eos usus accommodari. Similemque cautio„nem passim adhibet in aliis Lemmatis exponendis. Et caute „abstinet ab eis universalius proponendis, quam erat ad rem „suam necessarium. Quod moneo, ne quis eum negasse putet „aut ignorasse illorum universalitatem, quae minus universali„ter pronunciat, aut nescire, quae tacet."

*) „Nec quidquam fere frequentius est apud Euclidem aliosque „Geometras, quam particularia tradere, quibus statim opus est, „quorum generalia sunt itidem vera; sed quae vel nondum „probari possunt (sed post poterunt) vel ad rem praesentem „non sunt necessaria. Si istius modi generalia nondum pro„bari possunt, sed post futura sunt usui: tempus erit oppor„tunum eadem suo loco post probandi, antequam sint usui „adhibenda. Quomodo se res habet in prop. 16, 17. El. I. „jam mox usurpandis, adeoque speciatim probandis; sed po„stea generalius exponendis ad prop. 32. ejusdem; aliisque „multis istius modi, quas recensere non est necesse."

„Si vero generales ejusmodi propositiones neque post erunt „ad rem eam, de qua traditur, necessariae; tuto possunt non „differri tantum, sed omitti."

Pfleiderer's Anmerkungen

zu

Euclid's Elementen.

Erstes Buch.

Ὅροι, Definitiones, Erklärungen *) geben die Bedeutung an, in welcher gewiſse, entweder in der gemeinen Sprache nicht übliche, oder in derselben keine genau bestimmte Bedeutung habende Worte in der Folge immer sollen gebraucht und verstanden werden.

Anstatt „ist" gedenke man daher immer „heiſst;" wie z. B. namentlich in Def. 10., Theil 1.; Def. 11. 13. 24. 27. 30.; und wie Euclid dieses leztere Wort (καλεῖται, καλεισθω) in Def. 9., Def. 10., Theil 2., Def. 16. 34. wirklich gebraucht.

*) Das folgende über Definitionen, Postulate und Axiome findet sich, so wie es von Pfleiderer früher abgefaſst war, lateinisch, in Hauber's *Chrestomathia geometrica*. Tübingen. 1810. S. 279—296. abgedruckt. Pfleiderer hat aber den Aufsatz späterhin noch einmal, mit wenigen Veränderungen, aber mit vollständiger Aufnahme einiger zur Bildung richtiger Vorstellungen über die ersten Begriffe und Gründe der Geometrie vorzüglich geeigneter Stellen von Kästner, Klügel und Lambert, umgeschrieben: und so geben wir hier diesen Nachlaſs deutsch; wobei wir von den vielen Beilagen, die sich bei jenem Nachlasse fanden, nur Weniges, was uns das Merkwürdigste schien, mit aufgenommen, und an den gehörigen Stellen eingetragen haben.

Kästners *philosophisch-mathematische Abhandlungen.* 1. Was heifst in Euclids Geometrie möglich? §. 13. S. 17. fgg. „Vor Euklids erstem Buche stehen eine Menge Erklärungen. Mit „denselben will er nicht sagen, dafs solche Dinge möglich sind, wie „er da erklärt; sondern nur, dafs er die Worte in der angezeigten „Bedeutung nimmt."

„Die Erklärungen stehen am Anhang des Buchs beisammen, da„mit ein Leser, dem die Bedeutung des Worts nicht sogleich bei„fällt, weifs, wo er sie suchen soll: sie sind also eine Art von „Wörterbuch."

„Euklid's Erklärungen sind, was Wolff Wort-Erklärungen nennt."

IV. Ueber Kunstwörter, besonders in der Mathematik. S. 66. fg. „Die Geometer haben die Wörter so viel als „möglich aus der gemeinen Sprache genommen. — Was die Men„schen bei gewöhnlichen Verrichtungen brauchen, bestimmter der „Geometer nur genauer."

S. 81. fg. „Mit einem eignen Wort bezeichnet der Geometer „nur einen Begriff, den er oft nöthig hat, um nicht allemal denselben durch viele Worte anzudeuten. Leibniz in seiner Ausgabe „von Nizolii Antibarbaro, Diss. praelim. erläutert dieses durch das „Wort Quadrat."

„Aber nicht jedem zusammengesetzten Begriff gibt der Geometer „einen eigenen Namen; nur dem, den er sehr oft braucht. — So „sucht man immer mit den wenigsten Kunstwörtern auszukommen." [Vgl. Lambert's *Organon.* I. B. S. 32. fgg.]

S. 84. fg. „Die Mathematiker sind nicht sehr geneigt, neue „Wörter einzuführen; selbst solche, die Manches für sich haben: sie „wählen immer glücklich zwischen den beiden Unbequemlichkeiten, „einige bekannte Wörter oder ein einziges neues zu brauchen. Ist „die erste gröfser: so müfsen doch Zusammensetzung und Ableitung „des neuen Worts dienen, die Erklärung desselben leicht zu behalten, und es bequem anzubringen."

„Also Sparsamkeit in Kunstwörtern, Bildung derselben, dadurch „sie schon einigermafsen verständlich werden, genaue Bestimmung, „und Gebrauch in immer ungeänderter Bedeutung, das sind einige „von den Eigenschaften der mathematischen Sprache."

Klügels *math. Wörterb.* II. Th. Erklärung. „Mathema„tische Erklärung ist die deutliche Darstellung eines mathematischen „Begriffs durch Worte; mit Hinzufügung des Wortzeichens, welches „für den Begriff unveränderlich gebraucht werden soll. In reinen „mathematischen Erklärungen ist die Darstellung des Begriffs als „Subject eines Satzes zu betrachten, dessen Prädicat das Wortzeichen „ist; wenn gleich nach der grammatischen Stellung dieses das Sub„ject zu seyn scheint. Das Wortzeichen zum Subject machen, ist „nur, es grammatisch erklären."

„Es ist hier nicht der Fall, dafs das Erklärte aufser uns gegeben, „und uns schon undeutlich und unvollständig bekannt wäre; so dafs „die Erklärung den deutlichen und vollständigen Begriff von der „Sache geben mufs: sondern in der reinen Mathematik entspringen „alle Begriffe gleichsam auf unserem eigenen Grund und Boden. „Die Erklärungen enthalten eine Form der Gröfse, welche wir eigen„mächtig bilden. Wir gehen also von dem Begriff zu dem Wort„zeichen; nicht von dem schon irgend woher gegebenen Wortzeichen „zu dem Begriff und dessen Auseinandersetzung." —

„Eine mathematische Erklärung braucht nur in so fern bewie„sen zu werden, dafs zu zeigen ist: wie die darin liegende Form der „Gröfse möglich, und geometrisch oder analytisch dargestellt wer„den kann."

„Die Eigenschaften einer Form der Gröfse kommen ihr aus„schliefslich zu; nämlich nach dem grammatischen Sinne des Worts „Eigenschaft. Daher kann man dieselbe Form oft ohne Zwang auf „verschiedene Art characterisiren. — Von den geraden Parallelen „kann man verschiedene Definitionen machen; wodurch dann ein „verschiedener Gang in dem Theile des Systems, welcher die Paral„lelen betrifft, verursacht wird. Was nach der einen Methode zum „Grund gelegt wird, das wird nach der andern folgen."

Is. Barrow *Lectiones habitae in Scholis publicis Academiae Cantabrigiensis, annis* 1664. 1665. 1666. Lond. 1684. — Lectio VII. [1665.] pag. 125. sq. „Porro quoque constare poterit ex his: quid „sit, qualem obtineat veritatem id genus principii, quod Definitionis „nomine venire solet. Nempe quod sit propositio nomen indicans „alicujus rei, quae resultat ex aliqua suppositione possibili. Ut ex. „gr. — — In quibus perspicere licet: definitionis veritatem, quoad „ejus subjectum, esse mere arbitrariam. Illud enim nomen merum „contingenter ex arbitrio impositum (scil. a scientiae praeceptore „pro suo jure confictum; vel ab usu vulgari assumtum; vel docto„rum consensu approbatum; vel utcumque; nullatenus κατα φυσιν, „ex sua ipsius natura, sed omnino κατα θεσιν, ex hominum in„stituto, significans rem definitam). Quare non aliter demonstrari „potest, illud nomen convenire praedicato, quam ad Lexicorum „auctoritatem, ad popularem consuetudinem, ad doctorum suffragia „provocando; vel certe doctori cuivis in hoc competens jus sibimet „arrogando. At vero quoad praedicatum liquet, ejus (defini„tionis, inquam, cujuspiam) veritatem ex dictae hypotheseos (quam „includit) possibilitate dependere: sic ut vera fit definitio, quae „nomen assignat rei possibilem aliquam suppositionem in ipsa ex„pressam consequenti (vel ab ea resultanti). Cf. Arist. Met. XI, 7. „Unde porro liquet: definitiones ex sua natura non aliter esse de„monstrabiles quam hypotheses ipsas, e quibus velut emergunt; h. e. „quam ostendendo, nomen adaptari rei naturae conditionem habenti „satis manifeste possibilem. Nam certe rei incompossibilis vel re„pugnantiam implicantis non est ulla proprie definitio, sicuti nec „affectio."

Lambert's *Deutscher Gelehrter Briefwechsel. I. Bd. IV. Brief. Lambert an Holland.* S. 28. fgg. „Dafs Euklid seine Definitionen „vorausschickt und anhäuft, das ist gleichsam nur eine Nomenclatur. „Er thut dabei weiter nichts, als was z. B. ein Uhrmacher oder an„derer Künstler thut, wenn er anfängt seinen Lehrjungen die Namen „seiner Werkzeuge bekannt zu machen. Dabei ist es Eukliden ge„nug, wenn man ihm einräumt, dafs es solche Figuren gebe; sollte „es auch nur eine seyn. Hingegen fordert er die unbedingte Mög„lichkeit gerader Linien und Cirkel von jeder Gröfse und Lage: et „hoc si dederis, danda sunt omnia. — — — In Ansehung der Paral„lelen ist dieses Verfahren noch angenscheinlicher; weil die Defini„tion von derselben Möglichkeit gar nichts angibt: denn man müfste „sie sich gerade und beiderseits als ins Unendliche verlängert vor„stellen können. In den Beweisen braucht Euklid den Ausdruck „per definitionem im geringsten nicht anders, als den Ausdruck

„per hypothesin. Denn bis die Möglichkeit des Begriffs nicht „erwiesen ist, ist die Definition nur noch eine Hypothesis. Ist es „für sich, oder auch nur durch ein einziges Beispiel klar, dafs es „wenigstens einige solcher Figuren gibt, die die Definition anzeigt: „so mag die Definition vorausgeschickt werden, und zwar als eine „blofse Benennung. Die Bedingungen ihrer Möglichkeit müfsen „aber aus Grundsätzen und Postulatis folgen. — Die Definition der „Parallelen ist schlechthin eine Hypothese, bis ihre Möglichkeit er„wiesen wird; und da wird die Definition zum Subjecte." —

J. Alph. Borelli in seinem *Euclides restitutus*, Pisis 1658. 4. setzt häufig die Definitionen erst nach den Sätzen, in welchen das Definitum zum erstenmal vorkommt. So z. B. von Parallelen, Parallelogramm, Quadrat u. a.

Definitionen 1. 2. 3. 5. 6.

Unter Körper versteht man nach B. XI. Def. 1. in der Geometrie einen stetig nach allen Richtungen ausgedehnten und begränzten Raum. Das heifst: In der Geometrie wird jede besondere Beschaffenheit eines Körpers und seiner Theile bei Seite gesetzt: blofs die Ausdehnung desselben nach Länge, Breite, Tiefe oder Dicke, Höhe, d. h. das Bestehen desselben aus vor und hinter, neben, über und unter einander, stetig, d. i. ohne einige Unterbrechung, liegenden Theilen, besonders die bestimmte Art seiner Begränzung, d. h. seine Figur, betrachtet. *Στερεον εστι το μηκος και πλατος και βαθος εχον.*

Ausdehnung eines Körpers an seiner Gränze, d. h. (I. B. Def. 13.) da, wo er anfängt, aufhört, heifst seine Oberfläche. Diese Ausdehnung kann sich nur nach der Länge und Breite erstrecken; sonst wäre sie ein Theil, nicht Gränze des Körpers; *Στερεου δε περας επιφανεια.*

Abgesondert von dem Körper gedacht, heifst sie Fläche. B. I. Def. 5. *Επιφανεια εστιν, ὁ μηκος και πλατος μονον εχει.*

Die Ausdehnung einer solchen begränzten Fläche an ihrer Gränze heifst Linie. Diese kann sich nur der Länge nach erstrecken; sonst wäre sie Theil, nicht Gränze der Fläche. Def. 6. 2. *Επιφανειας περατα, γραμμαι. Γραμμη δε μηκον απλατες.*

Die Gränzen endlich einer begränzten geraden Linie, so wie die Zeichen eines genau bestimmten Orts auf einer Linie, Fläche oder Körper, welche man also ohne alle Ausdehnung denken mufs, heifsen Punkte. Daher definirt sie Savilius (in seiner Lect. III.) nicht unpassend als Merkzeichen einer untheilbaren Lage (*Notas situs indivisibilis*). Def. 3. 1. *Γραμμης περατα, σημεια. Σημειον εστιν, ὁ μερος ουδεν.*

Die Begriffe von der Ausdehnung sind den Geometern nicht eigenthümlich, sondern schon in der gemeinen Sprache und Verkehr geläufig.

Wer nämlich den Abstand zweier von einander entfernten Orte wissen will, der fragt blofs nach der Länge des Wegs, welcher von dem einen zu dem andern zurückzulegen ist.

Wer eine Mefsruthe, Mefselle untersucht, abstrahirt von ihrer Materie, Figur, Breite und Dicke, und gibt blofs auf ihre Länge Acht.

Wer die Wand in einem Zimmer tapeziren will, dem liegt nicht daran, die Dicke der Mauer zu kennen; der Feldmesser forscht nicht nach der Tiefe der Erde: beiden genügt die Kenntnifs der Oberflächen-Ausdehnung in die Länge und Breite.

Zwar sind die Punkte, die wir auf irgend eine Weise zeichnen, die Linien, die wir ziehen, d. h. die sinnlichen Bilder der Punkte, der Linien, immer Körper, die nach allen Richtungen ausgedehnt sind. Aber ihre Zeichnung gilt für um so genauer, je feiner sie ist: und in den Schlüssen wird bei den ersteren von aller Ausdehnung, bei den lezteren von jeder andern, als der in die Länge, völlig abstrahirt.

Vgl. Rob. Simsons Anmerkungen zu jenen Definitionen (nach Matthias Auszug. Magdeb. 1799.) S. 1. fgg. — Hauber Chrestomathia geometrica. Tübingen 1820. S. 97—99.

Kästners Abhandlungen. IV. S. 66. fgg. „Die Geometer haben die Wörter so viel als möglich aus der gemeinen Sprache genommen."

„Die griechischen Benennungen von Punkt, Linie, Fläche beziehen sich auf Bezeichnen, Schreiben, Auswendigerscheinen: Mittelpunkt des Kreises ist die Spur eines Stachels; der Cylinder vom Wälzen benannt. Was so die Menschen bei ihren gewöhnlichen Verrichtungen brauchen, bestimmte der Geometer nur genauer: bemerkte, dafs beim Zeichen die Gröfse zufällig und veränderlich ist; stellte sich also ein Zeichen vor, das keine Theile hat; freilich vom Auge nicht gesehen, aber bei dem, das das Auge sieht, vom Verstande gedacht werden kann: dafs man beim Zuge einer Schrift nur auf seine Richtung und Wendung sieht, die Breite gleichgültig ist: dafs am Aeufsern jenes Körpers seine Dicke nicht erscheint. So gieng der Geometer von Empfindungen aus, Begriffe für den Verstand zu bekommen."

„Im Deutschen sind Punkt, Linie, Fläche schon gelehrte Wörter; die ersten beiden selbst fremden Ursprungs; das letzte hat in seiner Bildung nichts, das auf äufseres Erscheinen an einem Körper deutete."

„Daher ist es in unserer, und auch in der Lateinischen Sprache methodischer, von der körperlichen Ausdehnung anzufangen; und

„zu zeigen, wie man an ihnen Gränzen, Flächen, und ferner Linien „und Punkte, wahrnimmt. Euklid, wörtlich ins Deutsche oder La„teinische übersetzt, scheint von einem Nichts anzufangen: in seiner „Sprache fängt er von einem Zeichen an, dabei man den Begriff der „Theile weglassen darf; weil viel oder wenig Theile haben, bei sei„nem allgemeinen Begriffe gleichgültig ist."

„Wird einem Deutschen, dem das griechische Wort nicht be„kannt ist, gesagt: Σημειον ist, was keine Theile hat; so ist ihm „die Frage wohl natürlich: Was hat es denn? Die Definition scheint „blofs zu sagen, was das Ding nicht ist; und sollte doch sagen, „was es ist."

„Also setzt sie zum voraus, man verbinde mit dem Worte ei„nen klaren Begriff; und die Definition bestimmt uns die Bedeu„tung, in welcher es hier genommen wird."

Kästners *Anfangsgr. der Geometrie. Erklärungen.* S. 165. fgg.

„1. Die Gränze einer Sache heifst ihr Aeufserstes, oder wo sie „aufhört."

„2. Eine stetige Gröfse (*Continuum*) heifst, deren Theile alle so „zusammenhängen, dafs, wo einer aufhört, gleich der andere anfängt; „und zwischen des einen Ende und des andern Anfang nichts ist, „das nicht zu dieser Gröfse gehörte."

„3. Die geometrische Ausdehnung ist ein Raum, den eine stetige „Gröfse ausfüllt."

„Der Begriff der geometrischen Ausdehnung ist ein abstracter „Begriff; welcher richtig bleibt, wie man auch sonst den Raum sich „vorstellen will. Man mufs eine stetige Ausfüllung des Raums an„nehmen, sobald man auf die besondere Beschaffenheit der Dinge, „welche den Raum ausfüllen, nicht sehen will."

„4. Die körperliche Ausdehnung, ein geometrischer Körper „(*Solidum, corpus*) heifst eine solche Ausdehnung, die das, was sich „innerhalb ihrer Gränzen befindet, überall nach allen Seiten zu um„gibt. Die Ausdehnung der Körper an ihren Gränzen heifst eine „Fläche (*Superficies*); und die Ausdehnung der Fläche an ihren „Gränzen, eine Linie (*linea*)."

„Die Wörter: Länge, Breite, Dicke, sind dem Sprachgebrauch „nach nicht Namen verschiedener Ausdehnungen; sondern einer ein„zigen, der Länge, die nach verschiedenen Richtungen an dem Kör„per betrachtet wird."

„Uebrigens enthält die Ausdehnung der Fläche nichts von der „körperlichen, welche bei ihr aufhört. Also können über einander „gehäufte Flächen keinen Körper ausmachen."

„Ebenso kann keine Fläche aus aneinander gelegten Linien be„stehen."

„5. Der Punkt ist die Gränze der Linie, und also aller Aus„dehnung. Folglich hat er weder Ausdehnung noch Theile; und „eine Menge an einander gesetzter Punkte macht keine Linie aus."

Klügels *Mathem. Wörterb. I. Th.* „Ausdehnung oder „ausgedehnte Gröfse ist zusammenhängende, gleichartige Viel„heit. Die körperliche Ausdehnung ist die allgemeine Form der „Vorstellung eines Körpers, nach Absonderung jeder besondern „Beschaffenheit und Wirksamkeit desselben. — Es ist in der That „einerley, zu behaupten; dafs wir an die schon in dem Geist vor„handene allgemeine Form der Körper ihre sinnlichen Beschaffenhei„ten knüpfen; oder zu sagen: dafs wir durch die Absonderung der-

„selben blofs die Form ohne etwas Wirkliches behalten. Die alten „Geometer liefsen sich auf diese metaphysischen Betrachtungen über „den Ursprung der geometrischen Begriffe nicht ein, vielleicht um „auf keine Weise den Philosophen Gelegenheit zur Einmischung in „ihre Wissenschaft zu geben." —

Ebend. III. Thl. Körper, Punkt, Linie. VI. Thl. Fläche. „Geometrischer Körper ist das begränzte körperlich Ausgedehnte, „was nach drei auf einander senkrechten Richtungen ausgedehnt ist, „oder Theile neben Theilen stetig liegen hat. Die Art der Begrän„zung, oder die Form eines Körpers, macht denselben zu einem Ge„genstand der Geometrie."

„Fläche ist die Oberfläche eines Körpers (seine Begränzung), „abgesondert von dem Körper gedacht."

„Linie ist die Gränze von der Fläche, abgesondert von der „Fläche gedacht. Daher hat sie nur Theile, die auf einander fol„gen, nach und vor einander, nicht zugleich neben einander liegen; „weil sie sonst einen Theil der Fläche ausmachte."

„Punkt ist die gemeinschaftliche Gränze zweier Theile einer „Linie: die aber als Gränze, keinen Theil weder des einen noch „des andern Stücks ausmacht. — Ein Punkt ist, wie Linie und „Fläche, ein abstracter Begriff, welchen man nicht sinnlich darstellen „kann; den aber selbst der gemeine und ungeübte Verstand sich in „den Theilungs- und Endpunkten einer sinnlichen Linie als untheil„bar vorstellt."

Lambert *Organon.* I. B. S. 502. „Den Begriff der Ausdeh„nung haben wir unmittelbar durchs Gefühl, mittelbar auch durchs „Sehen." — S. 461. §. 176. „Ungeachtet wir solche Begriffe a po„steriori haben: so ist es doch eigentlich nur das Bewufstseyn der„selben; und es läfst sich nicht daraus schliefsen, dafs die Begriffe „nicht selbst an sich schon sollten in der Seele seyn können, ehe „bei uns das Bewufstseyn desselben durch die Empfindung veranlafst „wird."

Ebend. I. B. S. 502. „Die Wissenschaft der Gröfse der Aus„dehnung ist die Geometrie."

Klügel *Mathem. Wörterb.* II. Th. „Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Formen ausgedehnter Gröfsen."

Definition 4. 7.

Linea recta est, quae ex aequo suis interjicitur punctis. *Ευθεια γραμμη εστιν, ητις εξ ισου τοις εφ' εαυτης σημειοις κειται.*

Plana superficies est, quae ex aequo lineis rectis in ipsa interjacet. *Επιπεδος επιφανεια εστιν, ητις εξ ισου ταις εφ' εαυτης ευθειαις κειται.*

Es scheint, der Begriff von gerader Linie lasse sich wegen seiner Einfachheit durch keine regelmäfsige Definition erklären, die nicht Wörter, die deren Begriff schon in sich schliefsen (dergleichen sind Richtung, Gleichheit oder Einerleiheit der Lage, Zug ohne Biegung), hereinnehme; und man könne denjenigen, der nicht weifs, was die Benennung gerade hier bedeutet,

es nicht anders lehren, als dadurch, dafs man ihm ein Bild oder eine Zeichnung davon auf irgend eine Art darstellt.

Eine Fläche heifst alsdenn eben: wenn jede gerade Linie, die von irgend einem Punkt der Fläche an irgend einen andern Punkt derselben gezogen wird, ganz in der Fläche liegt. Diese Definition drückt die gemeine Art, die Ebenheit einer Fläche durch Anlegung der Schärfe eines Lineals an dieselbe zu prüfen, durch allgemeine geometrische Ausdrücke aus.

Der Analogie nach, aber mit einem fehlerhaften Cirkel, könnte man den Sinn von Def. 4. so verstehen: eine Linie heifse gerade, wenn jede irgend zwei Punkte derselben verbindende gerade Linie auf dieselbe falle.

Vgl. Rob. Simsons Anmerkung zu Def. 7. S. 3.

Kästners *Anfangsgr. d. Geom.*, Erklärungen. S. 169. fgg.

„6. Eine gerade Linie ist, deren Punkte alle nach einer Gegend zu liegen."

„Die gerade Linie wird niemand aus irgend einer Erklärung „kennen lernen; und niemand hat es auch nöthig. Aber man kann „wohl etwas von ihr sagen, das die Aufmerksamkeit leitet, auf das, „was sie zu einer geraden Linie macht, genauer Acht zu geben. „Wenn man in A einen Punkt, einen Körper, auf dessen Gröfse „man nicht sieht, setzt: so kann sich derselbe von seinem Orte „nach unzähligen Gegenden bewegen. Sagt man, er soll nach B zu „gehen; so ist die Gegend bestimmt, nach der er gehen soll; und „er könnte nach eben der Gegend noch über B hinaus nach F ge„hen — Weil alle Theile einer geraden Linie AB, BF nach einerlei „Gegend zu liegen; so findet man in keinem Theile etwas, das nicht „auch in dem Ganzen zu finden wäre: denn das Ganze streckt sich „nach eben der Gegend. Nur die Gröfse unterscheidet den Theil „von dem Ganzen; und man kann also sagen: bei der geraden Li„nie sey jeder Theil dem Ganzen ähnlich. Wolf hat dieses für eine „Erklärung der geraden Linie angegeben; und die Aehnlichkeit in „eben dem Umstande gesucht, den ich angezeigt habe (Elem. Geom. „§. 19.). Ich finde nicht, dafs ihn dieses in den Stand gesetzt, von „der geraden Linie etwas neues oder gründlicheres, als man vor ihm „wufste, zu sagen."

„7. Eine ebene Fläche oder Ebene (*planum*) heifst, in der man „von jedem Punkte zum andern gerade Linien ziehen kann, so dafs „alle Punkte dieser Linien in der Fläche liegen."

Kästners *Abhandlungen*. III. S. 51. fgg. „Euklid's Axiome „von der geraden Linie beruhen alle auf klaren Begriffen; weil man „keine Erklärung der geraden Linie hat."

Wolfs Erklärung: „Jeder Theil einer geraden Linie sey der „ganzen ähnlich, ist durch das Wort Ganze einer Chicane ausgesetzt. „Was heifst die ganze gerade Linie? Der Kreis ist ein Ganzes: aber „die gerade Linie nie; weil sie immer kann verlängert werden. „Richtiger wäre der Ausdruck, den er im Zusatze zu dieser Erklä„rung Elem. Geom. §. 18. braucht: Theile einer geraden Linie sind „nur durch Gröfse unterschieden. Uebrigens ist, wenn man die ge-

„rade Linie noch nicht kennt, schwer zu verstehen, worauf die „Aehnlichkeit eines Theils mit dem andern ankommt. Freilich zeigt „Wolf §. 29.: dafs dazu immer einerley Richtung des Punkts, der „sie beschreibt, erfordert werde. Aber wer hat einen Begriff von „Richtung, ohne die gerade Linie zu denken, durch welche die Rich„tung angegeben wird? Also sagt Wolfs Erklärung: Eine gerade „Linie wird von einem Punkt beschrieben, der sich immer in gera„der Linie bewegt."

„Dafs also Wolf eigentlich eine Erklärung der geraden Linie „gegeben habe, an der jemand sie kennen könnte, das glaube ich „nicht. Allemal aber ist es nützlich, solchergestalt Aufmerksamkeit „auf das zu erregen, was Gerade vom Ungeraden unterscheidet. „Auch hat Wolf seinen Begriff gebraucht, zu zeigen: dafs gleiche „gerade Linien einander decken; und dafs durch zwei Punkte nur „eine gerade Linie geht (*Elem. Geom.* 168. f.)."

Kästners *Abhandlg.* I. S. 15. „Euklid setzt bei seinen Lehr„lingen einen klaren Begriff von einer geraden Linie zum Voraus. „Denn weder aus seiner Definition, noch aus irgend einer andern, „wird jemand eine gerade Linie kennen lernen der noch kein sol„ches Ding, davon die Geometrie den Begriff einer geraden Linie „abstrahirt, gesehen oder gefühlt hat."

Klügels *math. Wörterb.* III. Thl. Linie. II. Thl. Ebene. „Die gerade Linie ist diejenige, welche zwischen den auf ihr be„findlichen Punkten gleichförmig (auf einerley Art) liegt. — „Die Gleichförmigkeit der Lage der Theile ist es, was die gerade „Linie von der krummen unterscheidet. — Diese Identität in der „Lage der Theile gegen einander, sowohl der benachbarten als der „entfernten, ist die Ursache, warum es sich nicht zeigen läfst, wie „sie gezeichnet oder construirt werden kann. Der kleinste Theil ist „wie der gröfsere beschaffen; von keiner andern Gröfse oder Lage „abhängig. — Euklides setzt es daher als Postulatum: von jedem „Punkt aus bis an jeden andern eine gerade Linie ziehen; eine be„gränzte gerade Linie stetig geradefort verlängern. Das heifst: man „mufs den Begriff von einer geraden Linie zur Geometrie mitbringen. „Sie ist eine ursprüngliche Vorstellung des reinen Verstandes, die „nicht aus der Erfahrung geschöpft wird. — Auf der Gleichförmig„keit der Lage in einer geraden Linie beruht es, dafs zwischen zwei „Punkten nur eine gerade Linie statt findet; oder dafs sie durch „zwei Punkte in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung völlig be„stimmt wird. — Daher kann man auch die gerade Linie für die„jenige erklären, welche durch zwei Punkte, in ihrer ganzen unbe„gränzten Ausdehnung, nur auf eine einzige Art gezogen werden „kann. Zwei Punkte durch eine gerade Linie verbinden, heifst das: „diejenige Linie sich zwischen ihnen gedenken, welche nur auf eine „einzige Art zwischen ihnen gedacht werden kann. Eine gegebene „gerade Linie verlängern, heifst nur ihre Begränzung aufheben."

„Diese Vorstellungen scheinen die Griechischen Geometer bei „den Beweisen zum Grunde gelegt zu haben. Nicht aus der Erklä„rung der geraden Linie leitet Euklides etwas her; sondern aus dem „Grundsatze: dafs zwei gerade Linien keinen Raum einschliefsen. „Das ist aber im Grunde nichts anders als der Satz: Es ist nur eine „einzige gerade Linie zwischen zwei Punkten. Die Erklärung der „geraden Linie steht inzwischen nicht blofs wegen der methodischen „Form da: sondern sie dient, den abstracten Begriff von der gera-

„den Linie zu erwecken, und den Geist von den gröbern sinnlichen „Vorstellungen abzuziehen.“ —

„Ebene ist eine Fläche, auf welcher jede, durch irgend zwei „Punkte derselben gezogene, gerade Linie mit allen ihren Punkten „liegt. Sie ist allenthalben, in gröfseren und kleinern Theilen, „gleichförmig ausgedehnt; weil auf der geraden Linie die „Theile durchgehends eine gleichförmige Lage haben. Euklides sagt: „eine ebene Fläche ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen ge„raden Linien auf einerlei Art liegt. Diese Erklärung ist seiner „von der geraden Linie gegebenen, analog. — Er deutet durch sie „die Gleichförmigkeit der Ausdehnung an einer Ebene an. — Er „setzt in der That voraus: dafs sich in einer Ebene allenthalben „gerade Linien ziehen lassen.“

[Wir führen noch eine oder zwei Definitionen der geraden Linie aus Proklus an, welche zu dem Bisherigen in einiger Beziehung stehen. Nach der einen ist sie „diejenige, die, so lang ihre Gränzen bleiben, selbst auch bleibt,“ *ἡ των περατων μενοντων και αυτη μενουσα* (Proclus, p. 30. S. Chrestomathia geometrica, S. 90.): Nach der andern „diejenige, deren Theile alle auf alle gleicherweise passen“ (*παντα αυτης τα μερη πασιν ὁμοιως ἐφαρμοζει*). Man nimmt nämlich zu ihrer Erklärung auch den Begriff der Bewegung zu Hülfe. Man kann sich, was auch die Euklidische Definition fordert, eine gerade Linie abgesondert von verschiedenen auf ihr liegenden Punkten vorstellen. Schiebt man sie nun dergestalt in Gedanken hin oder her, dafs sie immer auf einigen dieser Punkte liegen bleibt, oder durch sie geht; so bleibt sie auch auf den übrigen, oder geht auch durch die übrigen Punkte, so weit sie reicht: keiner dieser Punkte ist bei dieser Bewegung aus ihr herausgetreten, keiner seitwärts von ihr gekommen. Hienach wäre eine gerade Linie diejenige, welche nicht bei einer Hin- oder Herbewegung auf einigen ihrer Punkte liegen bleiben kann, ohne auch, so weit sie reicht, auf den andern zu bleiben. Soll sie aber aus ihrer Lage heraustreten, so mufs sie aus allen ihren Punkten zugleich, einen einzigen etwa ausgenommen, heraustreten: so lange sie auch nur zwei Punkte ihrer ersten Lage behält, so behält sie ihre erste Lage ganz mit allen Punkten derselben. Sollte dieses etwa im Sinne der Euklidischen Definition liegen?

Alle Theile der geraden Linie passen auf alle gleichmäfsig. Dieses hat ebenfalls bei dem erwähnten Hin- und Herschieben Statt. Es läfst sich zwar auch ein Kreisbogen auf der Kreisperipherie, wovon er ein Theil ist, so herumschieben, dafs er immer auf der Peripherie liegen bleibt; und man kann sagen, dafs auch alle Theile der Kreisperipherie auf alle passen. Aber um dieses zu bewerkstelligen, ist noch nicht genug, wie bei der geraden Linie, dafs man zwei Punkte des einen Theils auf zwei Punkte des andern Theils bringe; denn die zwei Bögen können sich in diesen zwei gemeinschaftlichen Punkten schneiden; und wenn die Höhlungen der zwei Bögen nach verschiedenen Seiten zugekehrt sind, so lassen sie sich nicht zum Passen bringen.

Ferner beim Cirkelbogen ist das, was vom Raum an der einen, und was an der andern Seite desselben liegt, unähnlich begränzt; das eine hohl, das andere erhaben: und das gleiche findet bei jeder Krümmung Statt. Bei der geraden Linie hingegen ist der Raum,

der an der einen, und derjenige, der an der andern Seite von ihr liegt, völlig auf ähnliche Art durch sie begränzt. —

Archimedes von Syrakus *vorhandene Werke. Aus dem Griechischen übersetzt — — von Ernst Nizze.* Stralsund 1824. S. 43. Note β. „An jeder Linie, sie sey gerade oder gebogen, lassen sich „zwei Seiten unterscheiden, weil keine Linie ohne die zwei Flächen„räume gedacht werden kann, welche sie von einander trennt. Be„findet sich die trennende Linie in einer Ebene, und sind die da„durch getrennte Ebenenräume durch nichts anders zu unterschei„den, als durch ihre entgegengesetzte Lage; so ist die Linie gerade."

Ferner bei jedem Ungeraden findet ein Mehr und Weniger Statt. Gegen einen bestimmten Theil einer Linie sind, wenn sie ungerade ist, einige der übrigen Theile oder Punkte mehr, andere weniger seitwärts gerückt, oder nebendraufsen gelegen: bei der geraden Linie gibt es nur ein Fortgehen, kein Nebenhinausgehen, kein Seitwärtsliegen.

Gedenkt man sich einen noch so wenig gekrümmten Kreisbogen oder irgend einen krummen Bogen um seine Endpunkte als Pole sich herumdrehend; so beschreibt derselbe einen körperlichen Raum, er nimmt in jedem Augenblick seiner Bewegung eine von der vorigen verschiedenen Lage an; und in den zwei Lagen, welche er in einer und derselben Ebene, z. B. am Anfang der Bewegung und nach vollendeter halber Umdrehung einnimmt, stellt er zwei Linien dar, die mit einander eine ebene Figur, ein krummlinigtes Zweieck bilden. Eine gerade Linie hingegen, um ihre zwei Endpunkte oder irgend zwei ihrer Punkte als Pole gedreht, beschreibt keine Figur, beschreibt nichts neues, tritt nicht aus ihrer anfänglichen Lage heraus, bleibt immer dieselbe, immer in demselben Ort des Raumes. Diefs erläutert wiederum die oben angeführte Definition, *ἡ των περατων μενοντων και αυτη μενουσα.* Die Definition der geraden Linie, „quae circa suum utrumque extremum, tamquam polos, voluta locum non mutat," führt Kraft als ihm von F. C. Maier mitgetheilt an, und Hr. Camerer sagt auch, dafs sie ihm am besten gefalle, und bemerkt, wie einige der hauptsächlichsten Axiome von der geraden Linie sich aus ihr herleiten lassen. (Euclidis Elementorum Libri sex priores graece et latine — edidit Camerer. Berolini. 1824. p. 8.)]

Zusatz des Herausgebers.

Definitionen 8. 9.

Επιπεδος γωνια εσιν ἡ εν επιπεδῳ δυο γραμμων ἁπτομενων αλληλων, και μη επ' ευθειας κειμενων, προς αλληλας [των γραμμων, dieser Beisatz scheint verdächtig] *κλισις. Οταν δε αἱ περιεχουσαι την γωνιαν γραμμαι ευθειαι ωσιν, ευθυγραμμος καλειται ἡ γωνια.*

Die einen Winkel einschliefsenden Linien heifsen Schenkel, und der Punkt, in welchem sie einander treffen, oder zusammenlaufen, Scheitel, Spize des Winkels.

Insgemein theilt man die ebenen Winkel ein in solche, die von zwei geraden Linien gebildet werden, welche geradlinigte; oder von zwei krummen, welche

krummlinigte; oder von einer krummen und einer geraden, welche vermischtlinigte genannt werden.

Viviani und Rob. Simson bemerken: es sey nicht klar, lasse sich wenigstens an diesem Orte, nicht erklären, in welchem Sinne man es von einer geraden und krummen, oder von zwei krummen Linien zu nehmen habe, daſs sie geradefort (επ' ευθειας) liegen, indem zwei solche Linien nie, so wie zwei gerade, geradefort liegen; und halten es daher für sehr wahrscheinlich, daſs Euklides bloſs eine Definition vom geradlinigten ebenen Winkel gegeben, und irgend ein Halbwisser dieselbe allgemeiner zu fassen, und in zwei zu theilen unternommen habe. (Rob. Simsons Anmerkg. zu Def. 8. S. 3. fg.)

Clavius und Wallis halten nach Herons Vorgang dafür, unter geradefort liegenden Linien seyen solche zu verstehen, die als Fortsetzung oder Verlängerung von einander gelten können, so daſs Eine Linie daraus werde. Demunerachtet behauptet Ersterer von einem Winkel, daſs er ein reeller sey, der nach Letzterem ein imaginärer ist (Rob. Simsons Anmerkg. zu III, 16.); zum offenbaren Beweis der Zweideutigkeit jener Erklärung.

Erstes Buch der Elemente des Euklides. Griechisch und Deutsch, mit erläuternden Anmerkungen. Weimar 1800. Anmerkungen. S. 102. „An dieser Defini„tion [8.] ist gekünstelt worden, vielleicht enthielt sie „Anfangs nichts weiter als: *Επιπεδος γωνια εστιν η εν „επιπεδῳ δυο γραμμων προς αλληλας κλισις.* Nach und „nach wurde sie so überladen und verklausulirt, daſs „man *των γραμμων* sogar wiederholen muſste."

Der Begriff eines geradlinigten ebenen Winkels bezieht sich nach dem gemeinen Sinn, wie das Wort genommen wird, auf die Lage seiner Schenkel; nicht auf die Länge der Schenkel, welche bei unveränderter Lage derselben vergröſsert oder verkleinert werden kann, ohne daſs man dadurch den Winkel für verändert hält; auch nicht auf den zwischen den Schenkeln liegenden ebenen Raum, welcher unbestimmt und nach Verschiedenheit der Länge der Schenkel verschieden ist. Ein Winkel ändert sich aber, wenn einer seiner Schenkel, durch Drehung um des Winkels Spitze, dem andern Schenkel genähert oder weiter von ihm entferet wird: und zwar sagt man im ersteren Fall, der Winkel werde verkleinert, im andern, er werde vergröſsert. Mithin hängt die Gröſse eines geradlinigten Winkels von der Gröſse

des Auseinanderstehens seiner Schenkel; oder von der Drehung um seine Spitze ab, um welche ein Schenkel des Winkels von dem andern absteht.

Savilius meint, der Gebrauch des Worts κλισις (Neigung) sey hiebei nicht ganz angemessen, indem dasselbe eigentlich nur auf den spitzigen, nicht aber auf den rechten und stumpfen Winkel passe. „Quomodo in „recto angulo, ubi perpendicularis ακλινως, i. e. sine „ulla in alterutrum partem inclinatione, in istit, κλισις „dicatur? Quomodo in obtuso angulo, quae aversatio est „et εφεστροκλισια, potius quam alterius ad alterum „κλισις? praesertim cum in Def. 5. et 6. undecimi κλισις „tantum de acuto angulo dicatur."

Vielleicht könnte man auch erinnern, einen Winkel durch κλισιν, Neigung, definiren, heifse, idem per idem, wenigstens obscurum per aeque obscurum erklären.

Definition 10.

Hingegen sagt man, eine gerade Linie stehe auf einer andern schief, wenn sie die Nebenwinkel (τας εφεξης γωνιας, die an beiden Seiten von ihr liegenden Winkel) ungleich macht; und diese Winkel heifsen ebenfalls schiefe Winkel.

Definitionen 13. 14.

Gränze (ὁρος) heifst, worin etwas sich endet. Ὁρος εστιν, ὁ τινος εστι περας.

Figur heifst, was von einer oder mehreren Gränzen (ὁροις) eingeschlossen wird. Σχημα εστι το ὑπο τινος, ἡ τινων ὁρων περιεχομενον.

Nach Proclus und Hero bezieht sich das Wort Gränze (ὁρος, terminus) nicht auf alle Gränzen [namentlich nicht auf Linien]; sondern auf die in Ebenen befindlichen Räume und auf Körper: Gränze heifse nämlich der Umfang, der jeden Raum begränze und unterscheide: und eine solche Gränze werde definirt als περας, Ende; nicht in dem Sinne, wie ein Punkt Ende einer geraden Linie heifse; sondern insofern, als es einen Raum einschliefse und von dem, was um denselben herumliegt, ausschliefse. Savilius wendet ein, Def. 13. sey keine Definition, sondern Erklärung eines Worts durch ein gleichbedeutendes. Nach Rob. Simson ist Def. 13. auszustreichen.

Definitionen 15. 16. 17. 18.

Die von dem Mittelpunkt an die Peripherie gehenden geraden Linien, welche wir gewöhnlich Radios, Halbmesser nennen, heifsen im III. B. Def. 1. und Satz 26. schlechtweg gerade Linien aus dem Mittelpunkte (αἱ ἐκ τοῦ κέντρου). Wo davon die Rede ist, dafs ein Kreis beschrieben werden soll, z. B. in I. B. Post. 3. und Satz 1. 2. 3., wird die Benennung Abstand, Weite (διάστημα, *intervallum*) gebraucht, d. h. Entfernung der Punkte der Peripherie vom Mittelpunkt: welche Benennung man für nicht ganz genau halten kann, da sie voraussetzt, dafs die gerade Linie die kürzeste zwischen zwei Punkten sey: welcher Satz in den Elementen nicht vorkommt, und nur ein besonderer Fall desselben in I, 20. erwiesen wird.

Durch die Benennung Kreis bezeichnen wir öfters auch seine Peripherie. Heron.

Theile der Kreisperipherie, welche wir wahrscheinlich den Arabern nach (Campanus III. Def. 7.) gewöhnlich Bogen nennen, nennt Euklides immer ebenfalls Peripherien; wie gleich in Def. 18. 19.

Der zweite Theil von Def. 17., welches ein Satz ist, der bewiesen werden mufs, ist vorläufig nur als um der Def. 18. willen beigesezt anzusehen.

Def. 18. Der Halbkreis kommt zuerst in III, 31. vor: in II, 14. ist er unnöthig.

Definition 19.

Als solche setzt Proclus: Mittelpunkt des Halbkreises ist der nämliche mit dem des Kreises. Savilius bemerkt, dafs diese Definition von Proclus sich sowohl in den Handschriften als in den gedrukten Ausgaben des Euklides nicht finde. Er setzt hinzu, dafs unsere Def. 19., welche Proclus nicht hat, nicht hieher gehöre, und in III. B. Def. 6. wiederholt werde; daher hier auszustreichen sey. Dieser Meinung ist auch Rob. Simson.

Definition 20.

Die geraden Linien, welche die Figuren einschliessen, nennt man Seiten derselben; und diese alle zusammen genommen machen den Umfang oder Perimeter der Figur aus. Der von ihnen eingeschlossene Raum aber wird schlechthin mit dem Namen Figur, oder Fläche, Flächeninhalt (*area*) derselben bezeichnet.

Die geraden Linien, welche in Figuren von mehr als drei Seiten die Spitzen zweier, nicht an der nämlichen Seite liegender, Winkel verbinden, heifsen Diagonalen (*diagonales*, *diametri*) der Figur.

Uebrigens mufs in Def. 20. und fgg. hinzugedacht werden, was in Def. 15. ausdrücklich gesagt ist: dafs hier von ebenen Figuren die Rede sey.

Definition 24.

Ebenso heifsen überhaupt geradlinigte Figuren gleichseitig, wenn alle ihre Seiten einander gleich sind; gleichwinklichte aber, wenn alle ihre Winkel einander gleich sind. Figuren, die gleichseitig oder gleichwinklicht sind, heifsen reguläre, *ordinatae*; die übrigen irreguläre, *inordinatae*.

Definition 25.

Gleichschenklicht heifst ein Dreieck, das nur zwei gleiche Seiten hat. Und diese nennt man gewöhnlich Schenkel, die dritte Seite aber Grundlinie des Dreiecks. Ebenso heifsen auch in andern Dreiecken die dritten Seiten, wenn sie von den zwei übrigen unterschieden werden, Grundlinien: so in I, 4. 8. Allgemein nennt man Grundlinie eines Dreiecks so wohl, als irgend einer geradlinigten Figur diejenige Seite desselben, auf welcher man sich die Figur aufgestellt gedenkt; welches also jede Seite der Figur seyn kann. Und alsdenn heifst Scheitel oder Spitze des Dreiecks die Spitze des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels.

Definitionen 27. 28. 29.

Siehe die Bemerkungen zu I, 17.

Definitionen 30—33.

Siehe die Bemerkungen zu I, 34.

Definition 34.

Siehe zu I, 35.

Defininition 35.

Siehe zu I, 27—29.

Postulate, Αιτηματα,

(Forderungssätze, Heischesätze).

1. Postulate sind Fragen, bei welchen, wie sie aufgelöst werden, oder wie das, was in ihnen aufgegeben wird, bewerkstelligt werde, als für sich oder anderswoher bekannt, und mithin keiner Erklärung bedürftig, vorausgesetzt wird.

2. Euklides fordert:

1) *Απο παντος σημειε επι παν σημειον ευθειαν γραμμην αγαγειν*; von jedem Punkt an jeden Punkt (in einer gegebenen Ebene) eine gerade Linie zu ziehen;

2) *Πεπερασμενην ευθειαν κατα το συνεχες επ' ευθειας εκβαλλειν*; eine begränzte (in einer gegebenen Ebene gegebene) gerade Linie stetig geradefort (in der nämlichen Ebene) zu verlängern;

3) *Παντι κεντρῳ και διαστηματι κυκλον γραφεσθαι*; mit jedem Mittelpunkt und Abstand (die in einer gegebenen Ebene so gegeben sind, dafs der als Mittelpunkt gegebene Punkt der eine Endpunkt der den gegebenen Abstand oder Radius vorstellenden geraden Linie ist) einen Kreis (in dieser Ebene) zu beschreiben.

3. Die Sätze der Bücher I—IV. und VI. der Elemente beziehen sich nämlich nur auf ebene Figuren und in der nämlichen Ebene gezogene gerade Linien, auch wo sie nicht ausdrücklich darauf eingeschränkt werden. Mehrere derselben würden ohne diese hinzugedachte Einschränkung falsch seyn: z. B. B. I. Ax. 11. Satz 7. 14. 27. 28. III, 5. Es sind demnach die Postulate ebenfalls bestimmt unter den §. 2. zwischen den Parenthesen beigefügten Bedingungen zu verstehen; und ihr Gebrauch im Folgenden erfordert auch keinen weitern Umfang derselben.

Dafs die dem 3ten Postulat beigesetzte weitere Bestimmung dem Sinne Euklids gemäfs sey, beweist die Anwendung dieses Postulats im Folgenden.

4. Die abstracte Möglichkeit, oder die Realität des Begriffs, gerader Linien, und ebenfalls sowohl im Folgenden der Dreiecke und anderer geradlinigter ebener Figuren überhaupt, als im Vorhergehenden eines ausgedehnten Raums, der Flächen, Linien, Ebenen, Winkel, postulirt Euklides nicht, sondern setzt sie voraus.

Auch nimmt er die Bedingungen der Lehrsätze schlechthin an; hingegen die Determinationen der Data in den Aufgaben beweist er vorher.

Ausdrücklich aber fordert (postulirt) er, der Mühe überhoben seyn zu dürfen, zu lehren, auf welche Weise man in einer vorgelegten Ebene eine gerade Linie von einem gegebenen Punkt an einen gegebenen Punkt ziehe, oder eine vorgelegte gerade Linie beliebig verlängere, oder um einen gegebenen Mittelpunkt mit einem durch eine vom nämlichen Mittelpunkte ausgehende begränzte gerade Linie dargestellten Halbmesser einen Kreis beschreibe; und dafs man ihm also sein Unternehmen jemal als ausgeführt gelten lasse, so oft er eine verlangte Construction auf eine dieser Operationen zurückgeführt habe.

Dabei macht er sich aber anheischig, diejenige Verzeichnungen, die er in der Folge zu seinen Auflösungen und Beweisen nöthig haben werde, alle genau auseinander zu setzen, bis sie auf jene postulirte, oder auf andere vermittelst der letztern schon erklärte Constructionen zurückgeführt seyen.

5. Auch wird man bei den drei vorgetragenen Postulaten, sowohl in Beziehung auf die blofse Vorstellung im Verstande, als auf die Ausübung, welche keine andere Werkzeuge als Lineal und Zirkel, und die Fertigkeit sie zu gebrauchen, erfordert, Einfachheit und Leichtigkeit nicht vermissen.

6. Nach Newton (*Philos. natur. Princip. math. Praefat.*) „gehören die Verzeichnungen von geraden Linien und Kreisen, auf welche die Geometrie gegründet ist, zur Mechanik. Diese Linien zu verzeichnen lehrt die Geometrie nicht, sondern sie postulirt es. Sie fordert nämlich, dafs der Lehrling dieselbe genau verzeichnen gelernt habe, ehe er sich auf das Feld der Geometrie begibt; und lehrt sodann, wie vermittelst dieser Operationen Probleme aufgelöst werden. Gerade Linien und Kreise beschreiben, sind Probleme, aber keine geometrische. Ihre Auflösung wird aus der Mechanik postulirt; in der Geometrie wird gelehrt, wie man sie, als aufgelöste, gebrauche. Aber die Geometrie setzt ihren Ruhm darein, dafs sie mit so wenigen anderswoher genommenen Principien so Vieles leiste."

Kästners *philosophisch-mathematische Abhandlungen* I. Was heifst in Euklids Geometrie möglich?

„1. Euklids Forderungen, αιτηματα, sind: von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen; jede begränzte gerade Linie, so weit man will, verlängern; um jeden Mittelpunkt, mit jedem Halbmesser, einen Kreis beschreiben."

„Das ist alles, was er als möglich annimmt, ohne zu beweisen, dafs es möglich ist."

„2. Noch gehört zu so etwas Angenommenem der berüchtigte „XI. Grundsatz." —

„3. Nun nimmt Euklid nichts weiter als möglich an; von al„lem, das in seiner Geometrie ferner vorkömmt, beweist er: es sey „möglich."

„Und dieses dergestalt, dafs er zeigt, wie man das Ding, davon „die Rede ist, machen kann, wenn die angenommenen Möglichkeiten „zugestanden werden."

„4. So der allererste Satz der Geometrie: Ein gleichseitiges „Dreieck machen. Euklid nimmt nicht an: Drei gleiche gerade „Linien, lassen sich so zusammenfügen, dafs sie einen Raum ein„schliefsen; sondern er beweist: man könne sie so zusammenfügen."

„5. Einen Winkel mit einer geraden Linie [eine gegebene ge„rade Linie], zu halbiren, braucht Euklid im 9. u. 10. Satz das „gleichseitige Dreieck. Das gleichschenklichte würde ebendas leisten: „aber Euklid hat an diesen Stellen noch nicht gezeigt, unter was „für einer Bedingung ein ander Dreieck möglich ist als das gleich„seitige. Er braucht also nicht eher ein anderes, bis er im 20. Satze „diese Bedingung dargethan hat: dafs nämlich jede zwo Seiten mehr „betragen müfsen als die dritte. Erst dann lehrt er im 22. Satze: „dafs drei gegebene gerade Linien in dem Umfang eines Dreiecks „zusammenzufügen allemal möglich ist, wenn bei ihnen diese Be„dingung Statt findet."

„6. Euklids Aufgaben haben nicht eigentlich die Absicht, [de„rentwegen handwerksmäfsige Feldmesser geometrische Aufgaben ler„nen: zu zeichnen, sinnliche Bilder der geometrischen Begriffe so „genau zu machen, dafs ihre Striche dem Auge ohne Breite und „Dicke, ihre Tüpfelchen ohne Ausdehnung zu seyn scheinen. „Der Sand der alten Geometer, pulvis eruditus, gestattete wohl keine „so feinen Züge. Aber in ihn liefsen sich Gestalten graben, die, so „grob sie auch waren, dem Verstande in seinen Schlüssen zu Hülfe „kamen. Diese Figuren leisteten allemal den Dienst, die Möglich„keit einzusehen. Und das ist die Absicht der Euklidischen Auf„gaben; des sogenannten praktischen Nutzens unbeschadet."

„Diese Bemerkung über zweierlei Anwendung der Geometrie hat „schon Aristoteles gemacht (*Eth. Nicomach.* L. I. C. 7.). „Der „Zimmermann und der Geometer bekümmern sich unterschiedlich „um den rechten Winkel: jener, insofern er solchen zu seiner Ar„beit braucht; dieser als Wahrheitsforscher, was der rechte Winkel „ist, und wie er beschaffen ist. Hausen hat in der Vorrede zu „seinen Elem. Geom. den doppelten Gebrauch der geometrischen „Figuren dargestellt; und des Aristoteles Worte griechisch bei„gefügt." —

„Ein einleuchtendes Beispiel, wie der theoretische Geometer nur „auf Möglichkeit für den Verstand sieht, nicht auf Leichtigkeit der „Ausübungen der Darstellung eines sinnlichen Bildes, ist des XI. B. „12. S. [auch schon des I. B. 2. u. 3. S.]. Durch einen gegebenen „Punkt einer Ebene auf sie ein Loth zu setzen, soll man erst auf sie „ein Loth herablassen, und diesem durch den Punkt eine Parallele „ziehen. So hängt alles durch zuvor angewiesene Möglichkeiten zu„sammen. Wer würde aber in der Ausübung dieses Verfahren statt „des doppelten Winkelhakens brauchen?"

„7. So heifst beim Euklid möglich: 1. Was man als möglich „annimmt (§. 1.); 2. Was aus diesem angenommenen Möglichen, „auf Arten, deren Möglichkeit man annimmt, oder darthut, entsteht."

„8. Vielleicht findet ein Logiker in meiner Erklärung der er„sten Gattung von Euklids Möglichen einen Cirkel. Der Ausdruck „läfst sich leicht ändern. Man sage nur: Eine gerade Linie von „einem Punkte zum andern zu ziehen; sie so lang zu ziehen, als „man will; eine gerade Linie in einer Ebene um einen festen Punkt „zu drehen; das alles sind Verbindungen von Begriffen, wo kein „Widerspruch ist, weder zwischen den Begriffen, noch in der Art „sie zu verbinden."

„9. Aber woher weifs man nun, dafs kein Widerspruch vor„handen ist? Sicherlich ist dazu nicht genug, dafs man keinen „sieht. Denn ein Cirkelquadrirer, der das Verhältnifs des Durch„messers zum Umkreise rational angibt, sieht den Widerspruch in „seiner Angabe nicht; und ist gewöhnlich so blöden Gesichts, dafs „man ihm mit aller Mühe den Widerspruch nicht sichtbar macht."

„10. Es müfste bewiesen werden: dafs man keinen Wider„spruch sehen kann, dafs keiner da ist. Dazu müfsten wohl die „Begriffe von gerader Linie, Punkte, Drehen in einer Ebene, mehr „entwickelt werden, als Euklid sie entwickelt hat; man müfste in „der Geometrie weiter rückwärts gehen, als er gegangen ist. Das „mag versuchen, wer da will. Bisher haben sich die Geometer bes„ser dabei befunden, weiter vorwärts zu gehen."

„Die den XI. Grundsatz erweisen wollten, bestrebten sich wei„ter rückwärts zu gehen."

„11. Euklid setzt bei seinen Lehrlingen einen klaren Begriff „von einer geraden Linie zum Voraus: Denn weder aus seiner De„finition, noch aus irgend einer andern, wird jemand eine gerade „Linie kennen lernen, der noch kein solches Ding, davon der Geometer „den Begriff einer geraden Linie abstrahirt, gesehen oder gefühlt „hat. Auch von Bewegung braucht er nur den klaren Begriff, den „die Sinne geben. Und nun hat bisher noch niemand gezweifelt, „dafs diese klaren Begriffe sich noch miteinander verbinden lassen, „wie Euklids Heischesätze erfordern. Ob das nun heifst, diese Mög„lichkeit annehmen, oder empfinden, oder wie man es sonst nennen „will, das lasse ich unentschieden."

„12. Von allen andern geometrischen Begriffen wird die Mög„lichkeit erwiesen. Es wird nicht angenommen, dafs ein Quadrat „über einer gegebenen Seite möglich ist; sondern erwiesen: dafs der „gleichen Quadrat entsteht, wenn man auf die gegebene eine gleiche „senkrechte setzt, und durch jeder Endpunkt, den sie mit der an„dern nicht gemein hat, eine Parallele zieht (I. B. 46 S.). Und „diese Vorschrift, ein Quadrat über einer gegebenen Linie zu machen, „steht unmittelbar vor dem 47 S., weil derselbe von Quadraten der „Seiten des rechtwinklichten Dreiecks redet. Wäre nicht über je„der Linie ein Quadrat möglich: so gälte der pythagorische Satz „nur von solchen rechtwinklichten Dreiecken, über deren jede Seite „ein Quadrat möglich ist." —

„13. Vor Euklids I. Buch stehen eine Menge Erklärungen. „Mit denselben will er nicht sagen, dafs solche Dinge möglich sind, „wie er da erklärt, sondern nur, dafs er die Worte in der angezeig„ten Bedeutung nimmt. — In der Folge aber wird gewiesen, wie „sich das alles machen läfst, was ist erklärt worden, und so ge„rechtfertigt, dafs Euklid Dinge erklärt hat, nicht Undinge."

„Nämlich Euklid hat sich erst versichert: es gebe ebene Figu„ren, in vier gleiche Seiten eingeschlossen, die vier rechte Winkel

„machen. Diese Figuren hat er dann Quadrate genannt. Er kannte „die Sache, ehe er den Namen für sie machte." —

„14. Was Euklid als möglich beweiset, ist nothwendig mög„lich: in einem Verstande, der alle Kenntnisse der Elementar-Geo„metrie faſst, ist der Begriff davon: er kann seyn, wäre zu wenig „gesagt. Und weil sich die ganze Geometrie eigentlich im Ver„stande des Geometers befindet; so heiſst bei ihr wirklich seyn, im „Verstande seyn: folglich ist bei ihr alles Mögliche wirklich."

Klügels *Math. Wörterb.* III. Th. Postulat. Vgl. Linie. S. 448. „Postulat, Forderung, Heischesatz ist ein Satz, worin ver„langt wird, daſs Etwas ausgeführt werden soll, ohne daſs gezeigt „wird, wie es geschehen mag; weil dieses sich aus dem Begriffe der „Sache unmittelbar ergibt. In der Geometrie sind drei Postulate „— — das heiſst nichts anders: als, man muſs zur Geometrie die „Begriffe einer geraden Linie und eines Kreises mitbringen. Man „kann es niemand lehren, wie er es anzufangen habe, sich eine ge„rade Linie und einen Kreis vorzustellen. Denn von einer sinnlichen „Zeichnung ist hier gar nicht die Rede." —

Lamberts *logische und philosophische Abhandlungen.* I. Bd. S. 252. fg. „In der Meſskunst wird den Forderungen die Eigenschaft „gegeben, daſs ein jeder, der die Worte versteht, sogleich be„greifen muſs, daſs man die Sache in allen Fällen thun könne. — „Man kann die Ausübung einer Wissenschaft nicht höher treiben, „als wenn man beweist: daſs alle Regeln, die sie vorschreibt, sich „in etliche wenige Forderungen auflösen lassen. — Alle Aufgaben „der reinen Mathesis werden auf etliche wenige Forderungen reducirt. „Man wird auch in keiner Wissenschaft die Ausübung weit bringen, „wofern man sie nicht auf wenige Forderungen beziehen kann; d. h. „alle Regeln, alle Ausübungen derselben auf solche Sätze reduci„ren, deren Ausübung uns in allen, oder wenigstens in meisten Fäl„len möglich ist."

„Ich weiſs wohl, daſs man die Forderungen zur Theorie ge„braucht. So bedient man sich derselben in der Meſskunst, um „die Möglichkeit aller Figuren zu beweisen. Bei solchen Forderun„gen ist genug, wenn ihre Möglichkeit, an sich selbst betrachtet, „ohne Beweis zugegeben wird. So wäre es genug, zu fordern, daſs „man eine von einem Punkt zum anderu gezogene gerade Linie be„greifen könne. Allein Forderungen gehen eigentlich auf die Aus„übung; und fordern nicht nur, daſs etwas an sich selbst möglich „sey, sondern auch, daſs wir es in den meisten Fällen thun können; „es sey, daſs wir es schlechthin durch unsere Kräfte allein thun, „oder jedesmal die dazu gehörigen Hülfsmittel haben können."

Lamberts *log. und phil. Abh.* II. Bd. S. 227. fg. „Grund„sätze und Forderungssätze sollen keine zusammengesetzte Begriffe „enthalten: weil vorerst die Möglichkeit der Zusammensetzung er„wiesen werden müſste; und so wären es keine Forderungssätze oder „Grundsätze."

Lamberts *Organon.* I. Bd. S. 437. fgg. §. 8. fgg. „Einfache „Begriffe sind nicht aus innern Merkmalen, Bestimmungen zusam„mengesetzt. Sie sind daher selbst ihr Merkmal: und ihre Vorstellung, „insofern wir von allen andern Verhältnissen abstrahiren, dringt uns „eine unumgängliche Einförmigkeit auf; so daſs wir nicht nur nichts „darin finden, das sich unterscheiden lieſse; sondern daſs es an sich „unmöglich ist, etwas unterschiedenes darin zu finden. Daher be-

„ruht die Möglichkeit einfacher Begriffe schlechthin auf ihrer Ge„denkbarkeit."

„§. 14. Da die einfachen Begriffe nicht aus innern Merkmalen „zusammengesetzt sind, so lassen sie sich auch nicht durch solche „anzeigen. Demnach bleiben sie schlechterdings klar. —

S. 474. „§. 31. Da einfache Begriffe keine innere Merkmale „haben; so können auch durch eine Definition keine angegeben „werden. Folglich kann auch die Definition nicht zur Entwicklung „dessen, was sie in sich schliefsen, dienen. Sie taugt auch nicht, „um den Begriff kenntlich zu machen, weil derselbe schlechterdings „klar ist, und keine gemeinsame Merkmale hat; und schlechthin „durch die Empfindung erlangt werden mufs. Daher kann das „Wort höchstens nur durch Synonyme andern kenntlich gemacht „werden; oder in Ermanglung dessen mufs man anzeigen, wie man „zur Empfindung der Sache gelangen könne. Will man aber durch „Verhältnisse definiren: so mag diefs bei einzelnen Stücken der „wissenschaftlichen Erkenntnifs angehen; aber im Ganzen entstehen „Cirkel im Definiren daraus, die sich sodann nicht wohl vermeiden „lassen."

[Anmerkung des Herausgebers:

1) Beim dritten Postulat hat man eigentlich nicht nöthig den Begriff einer geraden Linie mit herein zu ziehen; sondern es ist genug, von zwei gegebenen Punkten zu reden, und das Postulat will sagen, dafs man aus einem derselben als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben könne, dessen Peripherie durch den andern gehe. Dieser Ausdruck wird durch das Wort διασημα, Abstand oder Weite, so abgekürzt: man könne mit dem einen von ihnen als Mittelpunkt, und mit dem Abstand von ihm zum andern, einen Kreis beschreiben. So in I, 12., wo der Punkt Γ gegeben ist, und der Punkt Δ angenommen wird, sagt Euklid, ohne erst die gerade Linie $\Gamma\Delta$ zu ziehen: κεντρῳ μεν τῳ Γ, διασηματι δε τῳ $\Gamma\Delta$ (man könnte auch schreiben τῳ Γ, Δ) κυκλος γεγραφθω. Dieses Wort διασημα gebraucht auch Theodosius in seinen Sphaericis für den Fall, wo auf einer Kugeloberfläche zwei Punkte z. B. Γ, Δ gegeben sind, und mit dem Pol Γ, und dem Abstand $\Gamma\Delta$ ein Kreis beschrieben werden soll; wobei auch nicht zuvor die gerade Linie von Γ nach Δ, oder der Bogen eines gröfsten Kreises zwischen Γ und Δ gezogen wird.

2) Man kann sagen, dafs bei dem ersten Postulat unnöthig sey, den Begriff einer Ebene, in welcher die zwei gegebenen Punkte liegen sollen, hinzuzunehmen; und dafs man an einen Punkt, der in einer vorgelegten Ebene liegt, von einem aufserhalb derselben liegenden Punkte eine gerade Linie ziehen könne, ohne erst nöthig zu haben, sich eine neue Ebene durch jene beiden Punkte zu gedenken. So zieht Euklid im Beweis von XI. 4. aus dem aufserhalb der vorgelegten Ebene liegenden Punkt Z an die in ihr liegenden Punkte A, H, Δ, Γ, Θ, B gerade Linien, ohne, was er hätte thun können, zuerst eine Ebene durch den Punkt Z und die gerade Linie $AH\Theta$, und wiederum eine durch Z und die gerade $\Gamma\Theta B$ zu legen.

3) Es sind unter den Sätzen der Bücher I — IV. und VI. viele, welche nicht blofs von Figuren in einer und derselben Ebene, sondern auch in verschiedenen Ebenen als gültig zu betrachten sind. Dergleichen sind die Sätze I. 4. 8., deren Beweis schon auch für den

Fall gilt, da die Dreiecke in verschiedenen Ebenen sind: denn da man ein Dreieck über das andere bringen soll, so ist es gleichgültig, ob man es von der nämlichen oder von einer andern Ebene herzuholen hat: diese Sätze werden auch für den Fall verschiedener Ebenen, in den Beweisen von XI, 4. 6. 18. 9. 20. 23. 24. 26. 35. gebraucht. So werden ferner der Satz I, 25. bei XI, 20. 23.; Satz I, 26. bei XI, 35.; ferner vom sechsten Buche Satz 4. bei XII, 4.; Satz 5. bei XI, 12.; Satz 6. bei XII, 3. 12.; Satz 20. bei XII, 8.; Satz 22. bei XII, 4. für solche Fälle gebraucht, wo die Figuren theils nothwendig in verschiedenen Ebenen sind, theils nur zufälliger Weise in einerley Ebene seyn können. Und so würden auch die Sätze I, 24.; III, 24. 25. 27. 28. 29.; VI, 7. 15. 16. 17. 19. 23. 32. auch für den Fall verschiedener Ebenen gelten.

Zwar wird der Beweis von I, 26. mittelst I, 3., und der Beweis von I, 24. mittelst I, 23. geführt, welcher letztere auf I, 22. und mittelbar auf I, 2. oder 3. sich stützt: und der Satz I, 2., wie auch der von ihm abhängige I, 3., sind offenbar nur von solchen gegebenen Punkten und geraden Linien, die in Einer Ebene sind, zu verstehen, was nämlich die dort gelehrte Construction betrifft. Allein dessen unerachtet konnte es zweckmäfsig seyn, die Möglichkeiten, eine gerade Linie einer gegeben gleich an einen gegebenen Punkt anzulegen, oder von einer andern gegebenen gröfsern abzuschneiden; einen geradlinigten Winkel einem gegebenen gleich an eine gegebene gerade Linie in einem auf ihr gegebenen Punkte anzulegen; welche allerdings im I. B. nur für Eine Ebene dargethan worden sind; auch auf den Fall auszudehnen, da die gegebenen Stücke in verschiedenen Ebenen liegen; wie z. B. bei XI, 26. 23. 35. geschieht. Und was die Beweise von I, 24. 25. 26. betrifft; so kann man ja die dortigen Dreiecke, wofern sie nicht in Einer Ebene wären, vorerst in Eine bringen; so gut als man die Dreiecke in I, 4. 8. aufeinander bringt.]

Axiome.

Axiome, *Κοιναι εννοιαι*, gemeine Begriffe.

1. Axiome sind Sätze, welche als in den gemeinen klaren Begriffen der Subjecte, von welchen sie handeln, enthalten, vorausgesetzt werden; deren Wahrheit mithin als einem jeden, der jene Subjecte kennt, für sich bekannt, und keines Beweises bedürftig angenommen wird.

Klügels *Math. Wörterb.* II. Th. „Grundsatz ist ein Satz, „der für sich so augenscheinlich ist, dafs er keines Beweises bedarf. „Man kann die Grundsätze eintheilen in logische oder formale, „und in materiale. Die erstern enthalten eine Schlufsform, die „der Mathematik eigen ist Dahin gehören die 7 ersten Grundsätze „in dem 1n Buch der Elemente — Die materiellen Grundsätze flieſsen „unmittelbar aus dem Begriffe, den sie betreffen" —

Ebend. III. Th. Postulate. „In dem griechischen Texte der „Euklidischen Elemente folgen auf die drei *Αιτηματα* überschrie„benen Sätze, 12 andere, *κοιναι εννοιαι*, gemeinschaftliche Vorstel„lungen, was wir Axiome, Grundsätze, nennen. Sie gehören theils „der Gröfsenlehre überhaupt, theils der Geometrie insbesondere an.

„Sie unterscheiden sich von den Postulaten, wie ein Theorem von „einem Problem." —

2. Die Axiome des I. Buchs der Elememte betreffen theils Gleichheit und Ungleichheit der Gröfsen im Allgemeinen (Ax. 1—7. 9.), sodenn der Gegenstände der Geometrie insbesondere (Ax. 8.); theils geben sie gewifse Eigenschaften gerader Linien (Ax. 10. 11. 12.) (keine des Kreises) an. Sie sind nämlich bestimmt, den Mangel genauer Definitionen der einfachen Begriffe der Gleichheit, der Ungleichheit, der geraden Linie, dergestalt zu ersetzen, dafs sie eine unbestimmte Berufung auf jene, welche vielleicht Trugschlüssen und Mifsbrauch ausgesetzt, wenigstens den Gesetzen einer genauen Methode nicht gemäfs wäre, abschneiden; indem sie bestimmt angeben, welche Sätze als in jenen gemeinen klaren Begriffen enthalten, in der Folge bei den Schlüssen angenommen werden. (Hingegen leitet Euklid die Eigenschaften, die er vom Kreise behauptet, aus der Gleichheit der von desselben Mittelpunkt an die Peripherie gehenden geraden Linien, die er in Def. 15. als Character desselben aufstellt, alle ohne eine weitere Annahme ab.)

3. Es werden demnach die Beweise der folgenden Behauptungen für vollendet gelten, wenn ihre folgerechten Folgerungen aus den dargelegten Bedingungen oder Constructionen auf die Anwendung jener Axiome, oder durch diese Methode schon erwiesener Sätze, reducirt seyn werden.

4. Dabei ist aber zugleich verwehrt, andere Axiome aufser denjenigen, welche zuvor ausdrücklich und genau vorgetragen und ausgesprochen sind, zu Hülfe zu nehmen, und stillschweigend in die Beweise hineinzuschieben. Letzeres gestatten die Gesetze der Methode, welche streng und offen zugleich zu Werke geht, nicht.

5. Schon in der gemeinen Rede und Verkehr wird, was jeder bei einiger Aufmerksamkeit bemerken wird, häufig nach den die Gleichheit oder Ungleichheit der Gröfsen überhaupt betreffenden Axiomen 1—7. 9. subsumirt; und nur die Allgemeinheit der Aussagen wird solchen, die nicht daran gewohnt sind, Anfangs zu schaffen machen; die Anwendung auf einzelne Fälle aber keine Schwierigkeit haben.

Ebenso ist von Axiom 8. wenigstens die mechanische Anwendung auf Hervorbringung oder Untersuchung der Gleichheit bei Längen und Figuren jedermann sehr

geläufig. Die Geometrie gibt nur dieses Kunstmittel dem Verstande an Hand, um allgemeine Folgerungen aus den angegebenen Bedingungen der Figuren ziehen zu können.

Die Behauptung des Axioms 10. läfst sich vermittelst eben desselben Axioms 6. erweisen, wie bei I, 11. gezeigt werden wird.

Das 11te Axiom wird, ehe es zum Beweis von I, 29. gebraucht wird, auf mehrerlei Weisen erläutert und bestätigt werden.

Endlich ist das 12te Axiom im gemeinen klaren Begriffe gerader Linien ohne Zweifel eingeschlossen.

6. Die die Gröfsen überhaupt betreffenden Euklidischen Axiome, mit den zu einigen derselben hinzuzufügenden weiteren Bestimmungen, so wie die übrigen, welche zu den folgenden Anwendungen erfordert werden, lassen sich aus den Axiomen 1. 2. 9. und den zwei folgenden ableiten:

a) Zwei gleichartige Gröfsen (oder solche, die sich in Absicht auf Gleichheit oder Ungleichheit mit einander vergleichen lassen) sind gleich, wenn keine von ihnen gröfser ist als die andere; die eine ist gröfser als die andere, wenn sie der andern weder gleich, noch kleiner als sie ist; und ebenso ist die eine kleiner als die andere, wenn sie der andern weder gleich, noch gröfser als sie ist.

Dieses läfst sich, wenn man will, auf den Satz zurückführen: dafs zwei gleichartige Gröfsen entweder einander gleich oder ungleich seyen; und wenn sie ungleich, die eine die gröfsere, die andere die kleinere sey: welcher nach Savilius Bemerkung in Lect. VIII. aus dem allgemeinen Grundsatz entspringt, dafs von widersprechenden Behauptungen immer die eine wahr, die andere falsch sey.

b) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich. Namentlich ist die gröfsere von zwei Gröfsen der kleineren und ihrem Ueberschufs über die kleinere zusammengenommen gleich.

7. Hieraus folgert man:

A.) Gröfsen, die gleichen Gröfsen gleich sind, sind auch einander gleich.

Denn es seyen die Gröfsen A, B gleich: ferner seyen die Gröfsen C=A, D=B. Weil nun sowohl C=A, als B=A (Vorauss.); so ist C=B (Ax. 1.). Aber es ist auch D=B (Vorauss.). Folglich C=D (Ax. 1.).

8. B.) Was gröfser oder kleiner ist als das eine von zwei Gleichen, ist auch gröfser oder kleiner als das andere.

1) Es sey die Gröfse C gröfser als die eine A von zwei gleichen A, B; und es bezeichne E den Ueberschufs der Gröfse C über die A.

So wird $C=A+E$ seyn (nr. 6, b.)

Da aber $B=A$ (Vorauss.): so ist $B+E=A+E$ (Ax. 2.)

folglich $C=B+E$ (Ax. 1.); und $C>B$ (Ax. 9.)

2) Es sey die Gröfse C kleiner als die eine A von zwei gleichen A, B; und es bezeichne F den Ueberschufs der Gröfse A über die C.

So wird $A=C+F$ seyn (nr. 6, b.)

Und daher, weil $B=A$ (Vorauss.), auch $B=C+F$ (Ax. 1.); und $B>C$ (Ax. 9.), oder $C<B$.

9. C.) Gleiche Gröfsen sind der nämlichen Gröfse oder gleichen Gröfsen entweder zugleich gleich, oder zugleich gröfser, oder zugleich kleiner als sie.

Es seyen die gleichartigen Gröfsen $A=B$, $C=D$; und $C \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} A$. Da $A=B$ (Vorauss.), so wird ebenfalls $C \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} B$ (Ax. 1. u. nr. 8.): und daher, da $D=C$ (Vorauss.), auch $D \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} B$ (Ax. 1. u. nr. 8.)

10. Ax. 4. Zu Ungleichem Einerlei oder Gleiches, oder zu Einerlei oder Gleichen Ungleiches hinzugesetzt, bringt Ungleiches; und zwar ist dasjenige Aggregat das gröfsere, von welchem das Gröfsere der Ungleichen ein Theil ist.

Auch wenn zu dem gröfseren von zwei Ungleichen ein Gröfseres, zum Kleineren ein Kleineres hinzukommt; so sind die Ganzen ungleich; und zwar ist das erste Aggregat gröfser als das zweite.

1) Es seyen die gleichartigen Gröfsen $A=B$, und $C>D$, und es sey E der Ueberschufs der Gröfse C über die D.

So ist $A=B$ (Vorauss.)

$C=D+E$ (nr. 6, b.)

daher $A+C=B+D+E$ (Ax. 2.)

und $A+C>B+D$ (Ax. 9.)

2) Es sey sowohl A > B, als C > D; und es bezeichnen $\left\{\begin{matrix}F\\E\end{matrix}\right\}$ die Ueberschüsse der Gröfsen $\left\{\begin{matrix}A \text{ über } B\\C \text{ über } D.\end{matrix}\right.$

So ist A = B + F (nr. 6, b.)
C = D + E (nr. 6, b.)

daher A + C = B + D + F + E (Ax. 2.)
und A + C > B + D (Ax. 9.)

11. Ax. 3. Von Einerley oder Gleichen Gleiches hinweggenommen, bleibt Gleiches.

Es seyen die gleichartigen Gröfsen A = B, C = D, und sowohl C < A, als D < B, (nr. 9.)

So können A—C, B—D nicht ungleich; keines von beiden gröfser als das andere seyn.

Denn sollte A—C > B—D seyn können:
so würde, da C = D
A > B seyn (Ax. 4.), gegen die Vorauss. Ebenso wird gezeigt, dafs auch nicht B—D > A—C seyn könne. Mithin ist A—C = B—D.

12. Ax. 5. Von Ungleichem, Einerley oder Gleiches weggenommen; auch von Einerley oder Gleichem Ungleiches weggenommen, bleibt Ungleiches: und zwar ist in dem ersten Falle das gröfser, was von dem gröfseren Ungleichen übrig bleibt; in dem zweiten Falle das, was nach Wegnehmung des kleineren Ungleichen übrig bleibt.

1) Es seyen die gleichartigen Gröfsen A > B, C = D, und die beiden letzteren kleiner als jede der ersteren. Ferner sey F der Ueberschufs von A über B.

So sind A = B + F
C = D

daher A—C = B—D + F (Ax. 3.)
und A—C > B—D (Ax. 9.)

2) Es seyen A = B, C > D, und beide letztere wieder kleiner als jede der ersteren. Ferner sey E der Ueberschufs von C über D.

Da B = A (Vorauss.); so ist auch B + E = A + E (Ax. 2.)
ferner D + E = C (Vorauss. u. nr. 6, b.)

Mithin B—D = A—C + E (Ax. 3.)
und B—D > A—C (Ax. 9.)

13. Ax. 6. Von Einerley oder Gleichen sind die Doppelten gleich.

1) Wenn A = 2C, und B = 2C; so ist A = B (Ax. 1.)

2) Wenn A=B: so ist auch A+A=B+B (Ax. 2.); das ist, 2A=2B.

14. Ax. 7. Von Einerley oder Gleichen sind die Hälften gleich.

1) Wenn A=½C, und B=½C; so ist A=B (Ax. 1.)

2) Wenn A=B; so ist nicht ½A>½B. Sonst wäre ½A+½A>½B+½B (nr. 10, 2.); das ist, A>B; gegen die Vorauss.

Und ebenso läfst sich zeigen, dafs auch nicht ½B>½A sey.

Folglich ist ½A=½B (nr. 6, a.)

15. In den Folgen der Axiome 1 — 7., kann man sagen, werden Gröfsen einander substituirt, welche in den Bedingungen einander gleich gesetzt wurden. Daher umgekehrt lassen sich diese Axiome folgern, wenn man mit Wolf in seinen *Elem. Math. Univers.* als Definition annimmt: Gleiche Gröfsen sind, deren eine der andern der Quantität unbeschadet sich substituiren läfst.

Allein diese Definition scheint vielmehr eine Folge der Gleichheit der Gröfsen, als den klaren Begriff derselben selber auszudrücken; und Euklides scheint, wie anderswo, so auch hier der allgemeinen Prädicirung der Substituirbarkeit gleicher Gröfsen bestimmte Anwendungen derselben, ausdrücklich und kurz ausgesprochen, und nicht einmal auf die möglich geringste Anzahl gebracht, theils für den Zweck eines um so ungehindertern und unmittelbarern Gebrauchs im Folgenden, theils um Zweideutigkeit und Licenz abzuschneiden, und die folgende Reihe von Räsonnemens in genau beschränkten Gränzen zu halten, vorgezogen zu haben.

Lamberts *Organon.* I. B. S. 514. fg. §. 115. „Die Identität, „Einerleiheit der Gröfse heifst die Gleichheit; und Dinge sind „gleich, sofern sie einerlei Gröfse haben. Wenn daher zwei Gröfsen „einer dritten gleich sind; so sind sie unter sich gleich. Wenn „gleiche Gröfsen auf einerlei Art verändert, um gleich viel vermehrt „oder vermindert werden; so sind die herauskommenden Gröfsen „ebenfalls gleich."

S. 520. §. 127. „Unter den Wissenschaften, so die einfachen „Begriffe zum Gegenstand haben, ist bisher nur noch die Arithmetik „und Geometrie in eine strengere wissenschaftliche Form gebracht. „Durch die für dieselben angegebenen Grundsätze und Postulata „(§. 83. fg. 115.) haben die tiefsinnigsten Lehrsätze und Aufgaben „möglich gemacht, erwiesen und aufgelöst werden können. Euklides „hat sie etwas specieller vorgetragen, und mehrere einzelne daraus „gemacht, um sie, so zu reden, näher bei der Hand zu haben."

Js. Barrow *Lectiones — Lectio* IV. [1664.] p. 66. sqq. „Ma„thematici non tantum pronuntiata manifeste vera praemit-

„tunt, et hypotheses assumunt liquido possibiles: at in „utroque genere strictissimam pancitatem affectant, „vel potius efflictim depereunt. (Arist. I. Post. Cap. 25.) Axioma„ta praemittunt, inquam, pancissima; parcissime quidvis petunt, as„sumunt, aut praesupponunt. Est enim tenerrimae frontis, et sto„machi robustissimi, pudentissimum genus hominum, et taedii pa„tientissimum. Quemvis concoquere malunt laborem in dictis suis „demonstrandis, quam assensum gratuitum emendicare, vel nimiam „auditorum liberalitatem experiri. Proprii ratiocinii virtuti, non „alienae facilitati deberi volunt conclusionum suarum evidentiam et „firmitatem. Solertia sua dignum arbitrantur e tenui sorte mirifice „tandem locupletes evadere; ab exili radice in immensam scientiae „proceritatem excrescere; super angusto fundamine vastam, nec mi„nus firmam erigere molem conclusionum. Per longas igitur amba„ges morosius et prolixius aliquas propositiones, alioquin facillimas, „deducere satagunt; eo quod a multiplicando postulatorum et axio„matum numero vehementer abhorreant."

„Quo nomine magnus ille censor (dicam, an carptor?) Ramus „Euclidem acriter reprehendit: quod plurimas is propositiones sus„ceperit demonstrandas, quas, ut ille quidem opinatur, satius fuisset „ceu luce sua claras arripere, indemonstratas anticipare, in axioma„tum censum referre. Et potuisset eodem jure totam catervam „veterum Geometrarum similis culpae reos peragere; ipsumque „in illis divinum Archimedem increpare: quod axiomata vel po„stulata plura, quem necesse fuit, assumendi licentiam refugiens, ad„miranda sua theoremata, quae brevius potuisset et clarius, ista ni„mirum arrogata sibi potestate, maluisset utcumque non nihil intri„catius proponere, prolixiusque demonstrare. Mihi vero contra neu„tiquam videtur improbandum, at magnopere potius laudandum et „amplectendum eorum institutum. Si quidem nulla debet nimia „censeri diligentia vel sollicitudo, quae primis scientiarum funda„mentis impenditur stabiliendis. Longe praestat, ut multae demon„strationes redundare, quam ut una videatur deficere. Detrahenda „est Epicureis ingeniis omnis ansa cavillandi; vel argumentationis „cujusvis principio, ceu incerto et minus notorio, consensum de„trectandi. Est amolienda, quoad fieri potest, ex hisce disciplinis „omnis suspicio, omnis formido, omnis haesitatio. Neque discentium „immodice praetentanda fides est; nec ipsorum animi longius disti„nendi sunt et obtundendi hypothesium multitudine; neque nimis „assuefaciendi temerariae praesumtioni. Saltem haut inutile sit nec „injucundum, ipsarum inter se primarum propositionum operâ syl„logistica cohaerentiam et cognationem ostendere. Denique sicut „magnificentius est et gloriosius exiguis copiis nostem debellare: ita „paucis ex principiis innumeras veritates adstruere plus admirationis „conciliat, impensioris aliquid laudis victrici prometetur rationi."

„Quare nec omnino vituperandam existimo (nedum ambitionis „aut furoris arcessendum, cum nonnemine) istam magni Apollonii „curiosam, sed ingeniosam sedulitatem; qui celeberrimum illud „Axioma: quae eidem aequalia etc., conatus est demonstrare. Ut „nec Regiomantani carperem supervacuum studium, primas „Arithmeticae vulgaris regulas ex Euclidis, ut perhibent, Elementis „aggressi deducere. Quos aemulatus quidam e nostris, ignotus „nemini philosophus, etiam clarissimi pronuntiati: Totum parte „sua majus est, demonstrationem attentavit."

„Illud utcumque constat ex dictis, quod ostendere propositum „mihi fuit: tantus ubi labor suscipitur, tam anxia cautela adhibetur, „ne facile propositio quaevis in axiomatis dignitatem assurgat, et ne „conserta turba concrescat hypothesium; ibi nil miri contingere, si „cunctae conclusiones quam validissime demonstrentur."

„In aliis autem doctrinis dispar procedendi modus est et ratio. „Nam axiomatum istic infinita seges pullulat, quae vel spissa volu„minum horrea replendo sit. Quaevis enuntiatio verisimilis ad prin„cipii gradum aspirat; et alicui comprobandae conclusioni qualem„cumque praestat operam, quamvis gratis assúmta. Cuilibet autem „expediendae quaestioni, vel phaenómeno explicando, nova distincta„que procuditur hypothesis. Quo fit, ut in eadem (quae dicitur et „habetur) scientia reperiantur hypotheses innumerae; quot, inquam, „materiae tractandae, tot hypotheses diversae, auscultantium nedum „fidem superantes, at vel ipsam memoriam obruentes; quae vix ulla „ratione fieri potest, ut omnes consistant et consentiant inter se, ne„que quod non plures sibi mutuo discrepent et adversentur."

16. Dafs man überhaupt Principien, Grundsäze, oder unmittelbare Sätze habe, welche man durch keinen weitern Grund zu unterstützen, durch keine vermittelnde Schlufsrede zu entwickeln und in andere Sätze aufzulösen brauche, macht die Unmöglichkeit einer Reihe von Schlüssen ohne Aufhören, die Nothwendigkeit eines Anfangspunkts für das Räsonnement erforderlich; sonst würde jede Erforschung, Bekräftigung und Erklärung der Elemente ein nie zu Ende zu bringendes, vergebliches Unternehmen seyn. Und das nämliche gilt in seiner Art von der Nothwendigkeit der Postulate.

Is. Barrow Lect. VII. [1665.] pag. 114. „Quod ad princi„pia spectat universim; recte non uno loco notat Aristoteles: „quod, sicut in motu naturali nullus ex infinito vel ad infinitum „processus datur, sed ab aliquo termino incipi, in aliquem desinere „oportet, si quidem infinitum nequit pertransiri (*ου γαρ εστι το „απειρον διελθειν*); ab infinito progressum sumenti numquam per„venietur huc, nec ab hoc ad infinitum tendens progressus umquam „finietur: ita in mentis operatione discursiva, quae motus „instar est continuo successiva, debet aliquis praestrui limes, „a quo discursus ordiatur; h. e. non omnes propositiones ab aliis „indesinenti serie comprobari, sed quaedam a demonstrante sumi, „concedique debent ab audiente; alioquin interminabilis et „irrita fuerit omnis, quae suscipitur, inquisitio, con„firmatio, vel declaratio veritatis. Prout aedes exstrui „nullae possunt; sic nec erigi scientiae, non substratis quibusdam „fundamentis. (*Μηδεν γαρ τιθεντες αναιρουσι το διαλογι„ζεσθαι και τον ὁλον λογον*; et *περι παντων αδυνατον „αποδειξιν ειναι*, docet et pluries inculcat Aristoteles (Met. „XI, 6. II, 2.)). Ejusmodi vero propositiones ideo dicuntur prin„cipia; quoniam ab iis (gratis assumtis ultroque concessis ex do„centis discentisque quasi pacto quodam et consensu mutuo) initium „desumit argumentatio, inde progrediens ad alias remotiores notitias."

[Anmerkungen des Herausgebers zu der ersten Klasse von Axiomen, welche die Gröſsen überhaupt betreffen.

Zu Ax. 1. Nach Proklus Bericht hat der Geometer Apollonius dieses Axiom durch Reduction auf Identität darzuthun versucht. (Proclus p. 54. cf. Chrestom. geometr. pag. 129. s.) Sein Beweis lautet bei Proklus so: «Es sey die Gröfse A der B gleich, und diese der C: so behaupte ich, daſs auch die A der C gleich sey. Denn da die A der B gleich ist: so nimmt sie mit ihr einerlei Platz ein (*τον αυτον χατεχει τοπον*). Und da die B der C gleich ist: so nimmt sie mit ihr ebenfalls einerlei Platz ein. Folglich nimmt auch die A einerlei Platz wie die C ein: sie ist ihr also gleich.» Proklus macht einige Einwendungen gegen diesen Beweis, die auch Savilius wiederholt (Chrestom. l. c.). Barrow nimmt sich des Beweises an, und stellt ihn selber dar. (Lect. V. [1664.]) «Haud absimiliter,» sagt er, nachdem er von einer Art Beweis des Axioms, daſs das Ganze gröſser als sein Theil sey, gesprochen hat, «aequales fore magnitudines, quae «eidem alteri magnitudini aequantur; ex aequalitatis, «quaecumque statuatur, notione statim, opinor, elucescet. Ut si cum «Apollonio (apud Proclum p. 54.) cumque aliis nonnullis (Hobb. «in Philos.) ponatur: alteri aequale designare, quod alteri collatum per omnia congruet, h. e. idem spatium replebit, eundem locum «occupabit; inde per *αγχινοιαν* quandam, celerrimo mentis ictu «discursuque velut instantaneo, consequetur dictum axioma. Posito «quippe: magnitudinem quamvis A occupare locum X, et ipsi «aequalem B propterea (ob suppositam sc. aequalitatis significationem) «eundem locum X occupare; item ipsi A aequalem esse C, et proinde C locum X etiam occupare; quoniam ostensum est, B et C «eundem locum X occupare; erunt B et C aequales itidem ex dicta «definitione vel significatione aequalitatis praesupposita. Niti quidem poterit hujusmodi discursu certa cognitio istius axiomatis; at «illum mens exserit nullo negotio, et quasi virtualiter potius quam «explicite: quem quidem discursum a praeclarissimo geometra Apollonio excogitatum sugillat Proclus; ita tamen, ut, si tanti res «foret, et opportune fieri posset, haud difficile videatur magnum virum a censura vindicare.» Auch Austin ist für Apollonius Vorstellung, welchen Hr. Camerer (Edit. Eucl. Elem. p. 28.) citirt, und ihm ebenfalls Recht gibt. Man könnte auch den Wolfischen Charakter der Gleichheit, die Substituirbarkeit, in diesem Verstand, auf räumliche Gröfsen eingeschränkt, nehmen.

Von Ax. 9. gibt Barrow folgende Art eines Beweises (l. c.): «Quod totum parte sua majus sit, aut pars toto minor, satis «evidenter consequi videtur ex intellecto vocabulorum Totius et Partis, Majoris et Minoris proprio significatu. Si quidem per Majus «altero denotatur id, quod alteram rem continet, aut alteri rei aequalem, aliquidque praeterea; per Minus altero id quod, vel id cui «aequale, continetur in altero sic, ut aliquid praeterea supersit. «Totum vero strictius designet id, quod continet aliud, et aliquid «insuper; Pars id, quod continetur in alio, sic ut, illo sublato, remaneat insuper aliquid. Ex quo liquet: Majus respectu totius, et «minus respectu partis, vi significationis vocabulorum, se habere ut «genus ad speciem, seu magis universalie nominis ad minus universale; proindeque juxta Logicae regulas infallibiles recte praedicari: «Totum est majus, Pars est minor.»

Zu Ax. 1. Bei den Anwendungen, die sich von diesem Axiom in den Elementen finden, kann man einige verschiedene Formen unterscheiden, in welchen nach demselben geschlossen wird; welche auch in allgemeine Ausdrücke gefaſst, einige verschiedene Aussagen desselben, oder ihm gleichbedeutende Axiome geben.

Die erste Form, welche mit dem Axiom *Τα τῳ αυτῳ ισα* u. s. w. zunächst übereinstimmt, ist diese: Wenn jede von zwey Gröſsen einer und derselben Gröſse gleich ist, so sind die ersten zwei Gröſsen einander gleich. Oder, wenn jede der beiden A u. B, der C gleich ist, so ist auch die A der B (oder die B der A gleich). So wird in I, 1. gefolgert: «Die *BΓ* ist der *BA* gleich. Es ist aber auch gezeigt worden, daſs die *ΓA* der *AB* gleich sey: Mithin ist jede der beiden *ΓA*, *ΓB* der *AB* gleich. Aber solche, die dem nämlichen gleich sind, sind auch einander gleich. Folglich ist auch die *ΓA* der *ΓB* gleich.» So in I, 2. «*AΔ* ist der *BH* gleich. Es ist aber auch gezeigt worden, daſs die *BΓ* der *BH* gleich sey. Mithin ist jede der beiden *AΔ*, *BΓ* der *BH* gleich. Solche aber, die dem nämlichen gleich sind, sind auch einander gleich. Folglich ist auch die *AΔ* der *BΓ* gleich.» Kürzer in I, 3. «Die *AE* ist der *AΔ* gleich. Aber auch die *Γ* ist der *AΔ* gleich. Mithin ist jede der beiden *AE*, *Γ* der *AΔ* gleich. Folglich ist auch die *AE* der *Γ* gleich;» wo das erste Axiom, als Obersatz des Schlusses, nach der logischen Sprache, nicht mehr wiederholt wird; indem man nämlich, wie Lambert bemerkt (*Organon*. I. B. S. 155. §. 150.): «im gemeinen Reden und auch im schriftlichen Vortrage zuweilen den einen Vordersatz des Schlusses wegläſst, weil er an sich offenbar [oder schon öfters vorgekommen, und daher bekannt genug] ist. — Solche Schlüsse, worin ein Satz weggelassen, und nicht einmal citirt wird, wie es die Mathematiker mehrentheils thun, heiſsen Enthymemata, verstümmelte Schlüsse.» S. 160. «Die Mathematiker fangen gemeiniglich bei dem Untersatze an, und folgern den Schluſssatz, so oft der Obersatz entweder für sich klar ist, oder durch Citiren angezeigt werden kann. Zuweilen werden beide Vordersätze noch erst durch Schlüsse aus dem Vorhergehenden hergeleitet, und sodann der Schluſssatz gezogen. Man hat hierin ohne Nachtheil der Richtigkeit des Zusammenhangs mehr als eine Auswahl, und die vorhin (§. 150.) angezeigten abgekürzten Arten des Vortrags eines Satzes benehmen dieser Richtigkeit ebenfalls nichts, so oft sie im förmlichen Schlusse selbst da ist.»

Noch kürzer lautet die Schluſsform in I, 35. «Die *AΔ* ist der *BΓ* gleich. Aber auch die *EZ* ist der *BΓ* gleich. Folglich ist auch die *AΔ* der *EZ* gleich.» In I, 40. «Das Dreieck *ABΓ* ist dem Dreieck *ZΓE* gleich. — Aber das Dreieck *ABΓ* ist dem Dreieck *ΔΓE* gleich. Folglich ist auch das Dreieck *ΔΓE* dem Dreieck *ZΓE* gleich.»

Eine andere Form ist: Wenn die erste der zweiten und auch der dritten gleich ist; so ist auch die zweite der dritten (oder die dritte der zweiten) gleich. Oder, wenn einerlei Gröſse jeder von zwei andern gleich ist, so sind diese zwei einander gleich. So in I, 22. «Die *ZΔ* ist der *ZK* gleich. Aber die *ZΔ* ist der *A* gleich. Folglich ist auch die *KZ* der *A* gleich.» Und wiederum: «Die *HΘ* ist der *HK* gleich. Aber die *HΘ* ist der *Γ* gleich. Folglich ist auch die *KH* der *Γ* gleich.» In I, 39. «Das Dreieck *ABΓ* ist dem Dreiecke *EBΓ* gleich. — Aber das Dreieck *ABΓ* ist dem Dreieck *ΔBΓ* gleich. Folglich ist auch das Dreieck *ΔBΓ* dem

Dreieck $EB\Gamma$ gleich.» In I, 44. «Da der Winkel HBE dem ABM gleich ist; aber der Winkel HBE dem Δ gleich ist: so ist auch der Winkel ABM dem Δ gleich.» In I, 45. «Da der Winkel E jedem der Winkel ΘKZ, $H\Theta M$ gleich ist; so ist auch der Winkel ΘKZ dem Winkel $H\Theta M$ gleich.»

Eine dritte Form ist: Wenn die erste der zweiten, und die zweite der dritten gleich ist; so ist auch die erste der dritten (oder die dritte der ersten) gleich. Diese Form kommt im Beweis von I, 26. zweimal vor; nämlich im ersten Theil: «Der Winkel $H\Gamma B$ ist dem Winkel ΔZE gleich. Aber der Winkel ΔZE ist dem Winkel $B\Gamma A$ gleich. Folglich ist auch der Winkel $B\Gamma H$ dem $B\Gamma A$ gleich.» Im zweiten Theil: «Der Winkel $B\Theta A$ ist dem $EZ\Delta$ gleich. Aber der $EZ\Delta$ ist dem $B\Gamma A$ gleich. Folglich ist auch der Winkel $B\Theta A$ dem $B\Gamma A$ gleich.» So in I, 36. «Da die $B\Gamma$ der ZH gleich ist, aber die ZH der $E\Theta$ gleich ist: so ist also auch die $B\Gamma$ der $E\Theta$ gleich.» In I, 44. «Das Parallelogramm AB ist dem BZ gleich. Aber das BZ ist dem Dreieck Γ gleich. Folglich ist auch das AB dem Γ gleich.»

Hiebei kommen statt einfacher Gröfsen öfters Aggregate von Gröfsen vor. Z. B. nach der ersten Form in I, 13. «Die Winkel ΔBA, $AB\Gamma$ sind den drei Winkeln ΔBE, EBA, $AB\Gamma$ gle ch Es sind aber nach dem Bewiesenen auch die Winkel ΓBE, $EB\Delta$ den nämlichen dreien gleich. Dinge aber, die dem nämlichen gleich sind, sind auch einander gleich. Folglich sind auch die Winkel ΓBE, $EB\Delta$ den Winkeln ΔB , $AB\Gamma$ gleich.» In I, 14. «Die Winkel $AB\Gamma$, ABE sind zweien rechten gleich. Es sind aber auch die Winkel $AB\Gamma$, $AB\Delta$ zweien rechten gleich. Folglich sind die Winkel ΓBA, ABE den Winkeln ΓBA, $AB\Delta$ gleich.» In I, 15. auf ähnliche Weise. In I, 28. ebenfalls. Ferner nach der zweiten Form in I, 29. «Die Winkel EHB, $BH\Theta$ sind den Winkeln $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ gleich Aber die Winkel EHB, $BH\Theta$ sind zwei rechten gleich. Folglich sind auch die Winkel $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ zwei rechten gleich.» Auf ähnliche Weise in I, 45.

Noch mehr abgekürzt wird die Schlufsrede durch den Ausdruck „$Τετ' εστι$,“ das ist; oder. Z. B. in II, 1. „$Ιση γαρ ἡ \Delta K$, $τετ' εστιν ἡ BH$, $τῃ A$.“ In II, 4. „$Το \Theta Z τετραγωνον εστι$, $και εστιν απο τῆς, \Theta H$, $τετ' εστιν απο τησ A\Gamma$.“ In II, 8. «Die $B\Delta$ ist der BK, das ist, der ΓH gleich. Und die ΓB ist der HK, das ist, der $H\Pi$ gleich.» Mehr in seiner eigentlichen, erklärenden Bedeutung wird das $τετ' εστι$ gebraucht in II, 8. am Ende. „$Τῳ απο τῆς A\Delta τετραγωνῳ$, $τετ' εστι τῳ απο τῆς AB$ $και B\Gamma ὡς απο μιας$.“ — Auch wird mit dem erklärenden $εστι$ manchmal der nämliche Schlufs gemacht, wie mit dem $ισον εστι$. Wenn eine Gröfse einer andern gleich ist, so kann man auch sagen, die eine von ihnen sey dem gleich, was die andere ist. Z. B. In II, 5 «Das $A\Theta$ ist dem Gnomon $N\Xi O$ gleich. Aber das $A\Theta$ ist das Rechteck aus $A\Delta$, ΔB. Folglich ist auch der Gnomon $N\Xi O$ dem Rechteck aus AB, $B\Delta$ gleich.» Ebend. «Der Gnomon «$N\Xi O$ und das AH sind dem Rechteck aus $A\Delta$, ΔB und dem Qua- «drat der $\Gamma\Delta$ gleich. Aber der Gnomon $N\Xi O$ und AH sind das «Quadrat ΓEZB, welches von der ΓB ist. Folglich ist das Recht- «eck aus $A\Delta$, ΔB nebst dem Quadrat der $\Gamma\Delta$ dem Quadrat der «ΓB gleich.»

Aus Ax. 1. folgt ferner: Wenn die A der C gleich ist, und auch die B der C gleich ist: so sind die drei A, B, C einander gleich. Dieses folgt jedoch, wenn man keinen Sprung machen will, eigentlich erst durch den Mittelschluſs, den man zuvor machen muſs, daſs auch die A der B gleich sey. Diesen Mittelschluſs übergeht auch Euklid in I, 1. nicht. Erst nachdem er (in den oben angeführten Worten) geschlossen hat: «Folglich ist auch die $\Gamma\Delta$ der ΓB gleich;» fährt er fort: «Mithin sind die drei $\Gamma\Delta$, AB, $B\Gamma$ einander gleich.» So auch in III, 25.

Zu Axiom B. (oben nr. 8.) Dieses wird ebenfalls unter verschiedenen Formen angewandt. Z. B.

Erste Form: Wenn die erste der zweiten gleich ist, aber die dritte gröſser ist als die zweite; so ist auch die dritte gröſser als die erste. So im Beweis von I, 16. «Der Winkel BAE ist dem $E\Gamma Z$ gleich. Aber der Winkel $E\Gamma\Delta$ ist gröſser als der $E\Gamma Z$. Folglich ist auch der Winkel [$E\Gamma\Delta$ oder] $A\Gamma\Delta$ gröſser als der BAE.»

Zweite Form: Wenn die erste gröſser ist als die zweite, aber der dritten gleich ist: so ist auch die dritte gröſser als die zweyte (oder, so ist die zweite kleiner als die dritte.) So in I, 18. «Der Winkel $A\Delta B$ ist gröſser als der Winkel $\Delta\Gamma B$. Aber der Winkel $A\Delta B$ ist dem $AB\Delta$ gleich. Folglich ist auch der Winkel $AB\Delta$ gröſser als [$\Delta\Gamma B$ oder] $A\Gamma B$.» Eben dieselbe Form kommt in III, 7. 16. 18. vor. Ferner in I, 17. «Die Winkel $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ sind gröſser als die Winkel $AB\Gamma$, $B\Gamma A$. Aber die Winkel $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ sind zwei rechten gleich. Folglich sind die Winkel $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ kleiner als zwei rechte.» Ebenso in I, 29.

Dritte Form: Wenn die erste der zweiten gleich, und die zweite gröſser als die dritte ist, so ist auch die erste gröſser als die dritte. So in III, 8. «Die $A\Delta$ ist den zweien EM, $M\Delta$ gleich. Aber die EM, $M\Delta$ sind gröſser als die $E\Delta$. Folglich ist auch die $A\Delta$ gröſser als die $E\Delta$.» So auch in III, 15. «Die $A\Delta$ ist den zweien ME, EN gleich. Aber die ME, EN sind gröſser als die MN. Folglich ist auch die $A\Delta$ gröſser als die MN.»

Vierte Form: Wenn die erste gröſser ist als die zweite, die zweite aber der dritten gleich: so ist die erste gröſser als die dritte. So in III, 15. «Die $A\Delta$ ist gröſser als die MN. Die MN aber ist der $B\Gamma$ gleich. Folglich ist die $A\Delta$ gröſser als die $B\Gamma$.» In III, 9. «Die HZ, ZE sind gröſser als die EH. Aber die EH ist der $E\Delta$ gleich. Folglich sind die HZ, ZE gröſser als die $E\Delta$.»

Eine abgekürzte Form ist in III, 11. 2ten Beweis. «Die AH ist gröſser als die $H\Theta$; das ist, die $H\Delta$ ist gröſser als die $H\Theta$.» Eine Enthymema, wo das Mittelglied, daſs die AH der $H\Delta$ gleich sey, hinzuzudenken ist. In III, 11. 1n Beweis steht das Mittelglied dabei: «Die AH, HZ sind gröſser als die ZA, das ist, als die $Z\Theta$; denn die ZA ist der $Z\Theta$ gleich.»

Mit Zuziehung des 9. Axioms kommen folgende Formen vor: Wenn die erste der zweiten gleich ist, so ist sie gröſser als diejenige, die ein Theil der zweiten ist. So in I, 24. «Der Winkel ΔZH ist dem Winkel ΔHZ gleich. Folglich ist der Winkel ΔZH gröſser als der EHZ.» Oder: Was einem Ganzen gleich ist, ist gröſser als jeder Theil dieses Ganzen. Oder auch: Wenn die erste der zweiten gleich ist, so ist die zweite gröſser als diejenige, die ein Theil der ersten ist; oder: so ist ein Theil der ersten kleiner als

die zweite. So in I, 7. «Der Winkel $A\Gamma\Delta$ ist dem $A\Delta\Gamma$ gleich. Folglich ist der $A\Delta\Gamma$ gröfser als der $\Delta\Gamma B$.» In I, 44. Die Winkel $A\Theta Z$, ΘZE sind zwei rechten gleich: folglich sind die Winkel $B\Theta H$, HZE kleiner als zwei rechte. Nach Savilius Ausdruck (S. Chrestom. geom. p. 226.): «Si duae quantitates fuerint aequales, quarum una dividatur in partes, altera maneat indivisa: quantitas indivisa major est quacumque parte quantitatis divisae.»

Wiederum, wenn die erste der zweiten gleich ist, so ist die Ganze, von welcher die $\left.\begin{matrix}\text{erste}\\\text{zweite}\end{matrix}\right\}$ ein Theil ist, gröfser als die $\left.\begin{matrix}\text{zweite.}\\\text{erste.}\end{matrix}\right\}$ So in I, 20. «Der Winkel $A\Delta\Gamma$ ist dem Winkel $A\Gamma\Delta$ gleich. Folglich ist der Winkel $B\Gamma\Delta$ gröfser als der Winkel $A\Delta\Gamma$.» Oder auch: Wenn ein Theil einer Gröfse einer andern gleich ist: so ist die ganze erste gröfser als die andere.

Zu Ax. B. gehört noch der Zusatz: Was gröfser ist als das gröfsere von zwei ungleichen; ist noch viel mehr gröfser als das kleinere derselben. Oder, wenn die erste gröfser ist als die zweite, und die zweite gröfser als die dritte: so ist noch viel mehr (a fortiori) die erste gröfser als die dritte. Oder, wenn die erste gröfser ist als die zweite: so ist eine, die gröfser ist als die erste, noch viel mehr gröfser als die zweite. So in I, 21. «Der Winkel ΓEB ist gröfser als der $B\Delta\Gamma$. Aber nach dem Bewiesenen ist der Winkel $B\Delta\Gamma$ gröfser als der ΓEB. Folglich ist der Winkel $B\Delta\Gamma$ um vieles gröfser als der Winkel $BA\Gamma$.» Ebendaselbst: «Die ΓE, EB sind gröfser als die $\Gamma\Delta$, ΔB. Aber nach dem Erwiesenen sind die BA, $A\Gamma$ gröfser als die BE, $E\Gamma$. Folglich sind die BA, $A\Gamma$ um vieles gröfser als $B\Delta$, $\Gamma\Delta$.» So auch in XI, 22.

In Verbindung mit Ax. 9. erhält man auch die Formen: Wenn die erste gröfser ist als die zweite; so ist sie noch viel mehr gröfser als diejenige, die ein Theil der zweiten ist. Wiederum, wenn die erste gröfser ist als die zweite; so ist noch viel mehr die Ganze, von welcher die erste ein Theil ist, gröfser als die zweite.

Zu Ax. C. (ob. nr. 9.) Wenn die eine von zwei gleichen Gröfsen einer dritten, und die andere einer vierten gleich ist: so sind auch die dritte und vierte einander gleich. Wiederum, wenn zwei Gröfsen einander gleich sind, und zwei andere ebenfalls einander gleich, und eine der ersten einer der andern gleich ist: so sind alle vier einander gleich. So in I, 46. «Die AB ist der ΔE, und die $A\Delta$ der BE gleich. Es ist aber auch die AB der $A\Delta$ gleich. Folglich sind die vier BA, $A\Delta$, ΔE, EB einander gleich.» In I, 48. «Die Quadrate von ΔA, $A\Gamma$ sind den Quadraten von BA, $A\Gamma$ gleich. Aber den Quadraten von ΔA, $A\Gamma$ ist das Quadrat von $\Delta\Gamma$ gleich — — den Quadraten von BA, $A\Gamma$ aber ist das Quadrat von $B\Gamma$ gleich. Folglich ist das Quadrat von $\Delta\Gamma$ dem Quadrat von $B\Gamma$ gleich.» In II, 4. «Die Seite $B\Gamma$ ist der ΓH gleich. Aber die ΓB ist der HK gleich, und die ΓH der BK gleich. Folglich ist auch die HK der KB gleich; mithin das Parallelogramm ΓK gleichseitig.» In II, 8. «Da die $B\Gamma$ der $B\Delta$ gleich ist, aber die ΓB zwar der HK, die $B\Delta$ aber der KN gleich ist: so ist mithin die HK der KN gleich.» Ebendas. «Da die ΓB der $B\Delta$ gleich ist, aber die $B\Delta$ zwar der BK, das ist der ΓH gleich ist, die ΓB aber der HK, das ist, der $H\Pi$ gleich ist: so ist mithin auch die ΓH der $H\Pi$ gleich.» So auch, wenn statt der Gleichsetzung nur eine Erklärung ausgesprochen wird, statt Gleich-

seyn Seyn: wie z. B. in II, 11. «Das $Z\Theta$ ist dem $\Theta\Delta$ gleich. Und es ist das $\Theta\Delta$ das Rechteck aus AB, $B\Theta$ — — das $Z\Theta$ aber das Quadrat von $A\Theta$: folglich ist das Rechteck aus AB, $B\Theta$ dem Quadrat von ΘA gleich.»

Im übrigen Theil des Axioms C. ist enthalten: Wenn der gröfsern von zwei ungleichen Gröfsen eine dritte, und der kleinern eine vierte gleich ist: so ist auch die dritte gröfser als die vierte.

Zusatz hiezu: Noch viel mehr, wenn zwei Gröfsen ungleich sind, und eine dritte gröfser ist als die gröfsere derselben, und eine vierte kleiner als die kleinere; ist die dritte gröfser als die vierte.

Mit Zuziehung des Axioms 9. findet man folgende Schlufsformen: Wenn die erste gröfser ist als die zweite, und der dritten gleich ist: so ist eine vierte, von welcher die dritte ein Theil ist, noch viel mehr gröfser als die zweite. Dieser Schlufs kommt, jedoch mit einem vermittelnden Zwischensatz in I, 18. vor. «Der Winkel $A\Delta B$ ist gröfser als der $\Delta\Gamma B$. — Aber der Winkel $A\Delta B$ ist dem Winkel ABA gleich. — Folglich der Winkel ABA gröfser als der [$\Delta\Gamma B$ oder] $A\Gamma B$. Mithin ist der Winkel $A\Delta B$ um vieles gröfser als der Winkel $A\Gamma B$.»

Ein Beispiel von der Schlufsform: Wenn die erste gröfser ist als die zweite; so ist noch viel mehr diejenige, von welcher die erste ein Theil ist, gröfser als diejenige, die ein Theil der zweiten ist, kommt in I, 7., ebenfalls mit mehrerer Entwicklung vor. «Der Winkel $A\Gamma A$ ist dem $A\Delta\Gamma$ gleich. Folglich ist der Winkel $A\Delta\Gamma$ gröfser als der $\Delta\Gamma B$ [ein Theil des $A\Gamma A$]. Folglich ist noch vielmehr der $\Gamma\Delta B$ [von welchem der $A\Delta\Gamma$ ein Theil ist] gröfser als der $\Delta\Gamma B$.» In I, 24. so: «Der Winkel ΔZH ist dem ΔHZ gleich. Folglich ist der ΔZH gröfser als der EHZ [ein Theil des ΔHZ]. Mithin ist noch viel mehr der EZH [von welchem der ΔZH ein Theil ist] gröfser als der EHZ.» So in III, 13. «Die BH ist der HA gleich: mithin ist die BH gröfser als die ΘA [ein Theil der HA]: folglich ist noch viel mehr die $B\Theta$ [von welcher die BH ein Theil ist] gröfser als die ΘA.»

Axiom 6. «Dinge, die von einem und eben demselben das Doppelte sind, sind einander gleich;» Oder, «wenn jede von zwei Gröfsen doppelt so grofs ist als eine dritte; so sind sie einander gleich.» Ist als in Axiom 1. enthalten anzusehen: denn das Doppelte eines und eben desselben dritten seyn, heifst auch einem und ebendemselben gleich seyn, nämlich dem Doppelten dieses dritten. Es sey jede der beiden A und B das Doppelte der C; so ist also jede der beiden A und B den zweien C und C zusammen gleich; Dinge aber, die dem nämlichen gleich sind, sind einander gleich: folglich ist auch die A der B gleich. So wird in I, 42. geschlossen: «Das Dreieck ABI ist das Doppelte des Dreiecks AEI. Aber auch das Parallelogramm $ZEIH$ ist das Doppelte des Dreiecks AEI — folglich ist das Parallelogramm $ZEIH$ dem Dreieck ABI gleich.» Man kann hieher auch den Schlufs in I, 28. rechnen: «Da die Winkel $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ zweien rechten gleich sind, aber auch die Winkel $AH\Theta$, $BH\Theta$ zweien rechten gleich sind; so sind mithin die Winkel $AH\Theta$, $BH\Theta$ den Winkeln $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ gleich.» Das Aehnliche gilt auch von andern Gleichvielfachen. So vom Vierfachen in II, 8. «Das viermal von AB, BA eingeschlossene Rechteck ist das Vierfache von AK. Nach dem Bewiesenen ist aber auch

der Gnomon ΣTY das Vierfache von AK. Folglich ist das viermal von AB, $B\Delta$ eingeschlossene Rechteck dem Gnomon ΣTY gleich.»

Umgekehrt: «Wenn die eine von zwei gleichen Gröfsen das Doppelte einer dritten ist; so ist auch die andere das Doppelte dieser dritten.» Ist ebenfalls als in Ax. 1. enthalten anzusehen. So in II, 9. «Die Quadrate von $A\Gamma$, ΓE sind das Doppelte des Quadrats von $A\Gamma$. Den Quadraten von $A\Gamma$, ΓE ist aber das Quadrat von AE gleich — folglich ist das Quadrat von AE das Doppelte des Quadrats von $A\Gamma$.» Ebendas. «Die Quadrate von EH, HZ sind das Doppelte des Quadrats von HZ. Den Quadraten von EH, HZ ist aber das Quadrat von EZ gleich. Folglich ist das Quadrat von EZ das Doppelte des Quadrats von HZ.» In III, 20. «Die Winkel EAB, EBA sind das Doppelte des Winkels EBA. Es ist aber der Winkel BEZ den Winkeln EAB, EBA gleich. Folglich ist auch der Winkel BEZ das Doppelte des Winkels EAB.»

Zu Axiom 2. 4. 6. 7.

Der erste Fall von Ax. 2. ist, wenn zu gleichen Gröfsen einerlei Gröfse hinzugesetzt wird; welcher zu der Aussage des Axioms hinzuzudenken oder zu suppliren ist. Wenn nämlich zu zweien einander gleichen ein gemeinschaftliches drittes hinzukommt; so ist das erste und dritte zusammen dem zweiten und dritten zusammen gleich. Nun macht die gemeinschaftlich hinzugesetzte entweder mit jeder der beiden anfänglichen Gröfsen etwas aus, das sich als Eine Gröfse benennen läfst, ein einnamiges Ganzes, wovon die anfängliche und die hinzugesetzte Theile sind; oder sie macht nur mit der einen ein solches einnamiges Ganzes, mit der andern aber ein zweinamiges Aggregat, oder sie macht mit beiden zweinamige Aggregate.

a) Im ersten Fall liefse sich das Axiom so ausdrücken: Wenn zwei Ganze einen Theil gemeinschaftlich und die übrigen Theile einander gleich haben; so sind die Ganzen einander gleich. So in I, 35. «Die $A\Delta$ ist der EZ gleich, und die ΔE gemeinschaftlich: folglich ist auch die Ganze AE [die aus $A\Delta$, ΔE bestehende] der Ganzen ΔZ [der aus ΔE, EZ bestehenden] gleich.» Ebendas. «Das Trapez $ABH\Delta$ ist dem Trapez $EH\Gamma Z$ gleich. Man setze das Dreieck $HB\Gamma$ als gemeinschaftlich hinzu: so ist mithin das ganze Parallelogramm dem ganzen Parallelogramm $EB\Gamma Z$ gleich.»

b) Im zweiten Fall, wo die gemeinschaftlich hinzugesetzte mit der einen der gleichen Gröfsen etwas gibt, das sich als Eine Gröfse benennen läfst, mit der andern aber nur ein Aggregat; liefse sich das Axiom so ausdrücken? Wenn eine Gröfse in zwei Theile getheilt ist: so ist sie dem einen Theil und einer Gröfse, welche dem andern Theil gleich ist, zusammen gleich. So in I, 20., wo die $\Gamma\Delta$ der $A\Delta$ gleich gemacht worden, heifst es in dem Beweise: «Die ΔB [die aus BA, $A\Delta$ bestehende] ist den zweien AB, $A\Gamma$ gleich.» Oder: wenn ein Theil eines Ganzen einer gewifsen Gröfse gleich ist: so ist das Ganze derselben Gröfse und ihrem übrigen Theile zusammen gleich. Oder, wenn eine Gröfse dem einen Theil eines Ganzen gleich ist, so ist sie und der übrige Theil zusammengenommen dem Ganzen gleich. So in III, 7. «Die AE ist der BE gleich: folglich sind die BE, EZ der AZ [der aus AE, EZ bestehenden] gleich.»

In III, 8. «Da die *AM* der *EM* gleich ist; so setze man die gemeinschaftliche *MΔ* hinzu: so ist also die *AΔ* den *EM*, *MΔ* gleich.»

c) Beispiele vom dritten Fall sind auch häufig. So in I, 29. «Der Winkel *EHB* ist dem *HΘΔ* gleich. Man setze den gemeinschaftlichen Winkel *BHΘ* hinzu: so sind mithin die Winkel *EHB*, *BHΘ* den Winkeln *BHΘ*, *HΘΔ* [zusammen] gleich.» In I, 13. «Da der Winkel *ΓBE* den zweien *ΓBA*, *ABE* gleich ist; so setze man den Winkel *EBΔ* als gemeinschaftlich hinzu, und es sind mithin die Winkel *ΓBE*, *EBΔ* den dreien *ΓBA*, *ABE*, *EBΔ* gleich. Wiederum da der Winkel *ΔBA* den zweien *ΔBE*, *EBA* gleich ist; so setze man den Winkel *ABΓ* als gemeinschaftlich hinzu; und es sind mithin die Winkel *ΔBA*, *ABΓ* den dreien Winkeln *ΔBE*, *EBA*, *ABΓ* gleich.» In I, 32. «Der äufsere Winkel *AΓΔ* ist den innern gegenüberliegenden *BAΓ*, *ABΓ* gleich. Man setze den Winkel *AΓB* als gemeinschaftlich hinzu: so sind mithin die Winkel *AΓΔ*, *AΓB* den Winkeln *ABΓ*, *BΓA*, *ΓAB* gleich.» In I, 45. «Der Winkel *ΘKZ* ist dem Winkel *HΘM* gleich. Man setze den gemeinschaftlichen *KΘH* hinzu: so sind mithin die Winkel *ZKΘ*, *KΘH* den Winkeln *KΘH*, *HΘM* [zusammen] gleich.» Und wiederum: «Die Wechselwinkel *MΘH*, *ΘHZ* sind einander gleich. Man setze den gemeinschaftlichen *ΘHΔ* hinzu: so sind mithin die Winkel *MΘH*, *ΘHΔ* den Winkeln *ΘHZ*, *ΘHΔ* gleich.»

Im zweiten Fall des zweiten Axioms, wenn zu gleichen Gröfsen nicht eine gemeinschaftliche Gröfse hinzukommt, sondern gleiche Gröfsen hinzukommen, erhält man durch die Hinzusetzung wiederum, wie im ersten Fall, entweder a) zwei einnamige Ganze, oder b) ein einnamiges Ganzes und ein zweinamiges Aggregat, oder c) zwei zweinamige Aggregate.

Fall a). Beispiele In I, 34. «Da der Winkel *ABΓ* dem *BΓΔ* gleich ist, und der *ΓBΔ* dem *AΓB*: so ist also der ganze *ABΔ* dem ganzen *AΓΔ* gleich.» In I, 45. «Da das Dreieck *ABΔ* dem Parallelogramm *ZΘ* gleich ist, und das *ΔBΓ* dem *HM*: so ist mithin die ganze geradlinigte Figur *ABΓΔ* dem ganzen Parallelogramm *KZΔM* gleich.« Allgemein: Wenn von zwei Ganzen alle Theile allen Theilen, es mögen zwei oder mehrere Theile von gleicher Anzahl seyn, je ein Theil einem Theil, gleich sind: so sind die Ganzen einander gleich.

Fall b.) Beispiele. In I, 32. «Der Winkel *EΓΔ* ist dem Winkel *ABΓ* gleich. Nach dem Bewiesenen ist aber auch der Winkel *AΓE* dem Winkel *BAΓ* gleich. Folglich ist der ganze Winkel *AΓΔ* [der nämlich aus den zwei Theilen *AΓE*, *EΓΔ* besteht] den Winkeln *BAΓ*, *ABΓ* gleich.» In I, 47. Das Parallelogramm *BΔ* ist dem Quadrat *HB* gleich. Ebenso wird bewiesen, dafs das Parallelogramm *ΓΔ* dem Quadrat *ΘΓ* gleich sey. Folglich ist das ganze Quadrat *BΔEΓ* den zwei Quadraten *HB*, *ΘΓ* gleich.» In III, 22. «Der Winkel *ΓΔB* ist dem *BAΓ* gleich — der *AΓB* aber dem *ΔΔB*: ← folglich ist der ganze *AΔΓ* den zweien *BAΓ*, *AΓB* gleich.» Da nämlich das Ganze, es mag in so viele Theile getheilt seyn als man will, allen seinen Theilen zusammengenommen gleich ist; so ist es auch denjenigen Gröfsen zusammen gleich, welche seinen Theilen, je eine einem, gleich sind. Oder umgekehrt: Gröfsen, so viel ihrer seyen, welche eben so vielen Theilen eines Ganzen, je eine einem Theil, gleich sind, sind zusammengenommen dem Gan-

zen gleich. Dafs das Ganze seinen Theilen zusammen gleich sey, ist ein Beisatz, der zu Ax. 9. gehört; davon Gebrauch gemacht wird in I, 13. «Der Winkel ΓBE ist den zweien ΓBA, ABE gleich — — der Winkel ΔBA ist den zweien ΔBE, EBA gleich.» In II, 1. «Der Raum $B\Delta$ ist den Räumen BK, $\Delta\Lambda$, $E\Theta$ gleich;» und ebenso in vielen der folgenden Sätze des zweiten Buchs. Oder auch: Alle Theile zusammengenommen sind das Ganze. Wie in II, 4. «Die vier [Parallelogramme] ΘZ, ΓK, AH, HE sind das ganze $A\Delta EB$, welches das Quadrat von AB ist.» In II, 5. «Der Gnomon $N\Xi O$ und das AH sind das ganze Quadrat ΓEZB.» Ebenso in II, 6. In II, 8. «Der Gnomon ΣTY und das $\Xi\Theta$ sind das ganze Quadrat $AEZ\Delta$.» — Hiebei wird alsdann gemeiniglich von dem, dafs das Ganze seinen Theilen gleich sey, weiter geschlossen, dafs es solchen Gröfsen zusammen gleich sey, die seinen Theilen gleich sind; oder manchmal werden diese Theile auch nur anders benannt und ausgedrückt, und alsdann vom Ganzen gefolgert, dafs es seinen so benannten Theilen gleich sey. Wie z. B. in II, 1. «Die Figur $B\Theta$ ist den Figuren BK, $\Delta\Lambda$, $E\Theta$ gleich. Nun ist $B\Theta$ das Rechteck aus A und $B\Gamma$; — BK das Rechteck aus A und $B\Delta$; — $\Delta\Lambda$ das Rechteck aus A und ΔE; — $E\Theta$ das Rechteck aus A und $E\Gamma$. Mithin ist das Rechteck aus A und $B\Gamma$ dem Rechteck aus A und $B\Delta$, dem aus A und ΔE, dem aus A und $E\Gamma$ zusammen gleich;» wo zugleich das Ganze anders benannt wird. Und so in den folgenden Sätzen des II. B.

Fall c.) Beispiele. In III, 12. «Die AH ist der $H\Delta$ gleich. Es war aber bewiesen, dafs die $Z\Delta$ der $Z\Gamma$ gleich sey. Folglich sind die $Z\Delta$, AH den $Z\Gamma$, ΔH [zusammen] gleich.» In I, 43. «Da das Dreieck AEK dem Dreieck $A\Theta K$ gleich ist, und das Dreieck $KZ\Gamma$ dem $KH\Gamma$: so ist das Dreieck AEK nebst dem Dreieck $KH\Gamma$ dem Dreieck $A\Theta K$ nebst dem Dreieck $KZ\Gamma$ gleich.» Allgemein: Wenn die erste der dritten, und die zweite der vierten gleich sind: so sind die erste und zweite zusammen, der dritten und vierten zusammen gleich: oder wenn zwei Gröfsen zweien andern, je eine einer, gleich sind; so ist die Summe der zwei ersten der Summe der zwei andern gleich. — So ferner in II, 5. «Der Gnomon $N\Xi O$ ist dem Rechteck aus $A\Delta$, ΔB gleich. Man setze das gemeinschaftliche ΔH hinzu, welches dem Quadrat von $\Gamma\Delta$ gleich ist: so ist mithin der Gnomon $N\Xi O$ und das ΔH dem Rechteck aus $A\Delta$, ΔB und dem Quadrat von $\Gamma\Delta$ gleich.» In II, 6. der Gnomon $N\Xi O$ ist dem von $A\Delta$, ΔB eingeschlossenen Rechteck gleich. Man setze das gemeinschaftliche ΔH hinzu, welches dem Quadrat von ΓB gleich ist: so ist mithin das von $A\Delta$, ΔB eingeschlossene Rechteck nebst dem Quadrat von ΓB dem Gnomon $N\Xi O$ und dem ΔH gleich.» — Auch ist das zu Gleichen hinzugesetzte manchmal zwar einerlei, jedoch auf verschiedene Weise benannt und ausgedrückt; z. B. in II, 7. «Der Gnomon $K\Lambda M$ und das Quadrat ΓZ ist dem zweimal von AB, $B\Gamma$ eingeschlossenen Rechtecke gleich. Man setze das gemeinschaftliche ΘN hinzu, welches das Quadrat von $A\Gamma$ ist: so sind mithin der Gnomon $K\Lambda M$ und die Quadrate ΓZ, ΘN dem zweimal von AB, $B\Gamma$ eingeschlossenen Rechteck und dem Quadrat von $A\Gamma$ gleich.»

Hieher gehört die etwas allgemeinere Bemerkung: Wenn von zwei gleichen Gröfsen die eine, oder beide, ein Aggregat mehrerer Gröfsen ist; so bleibt die Gleichheit auch, wenn in einem solchen

Aggregate statt eines seiner Theile eine ihm gleiche, oder statt mehrerer Theile eine ihnen zusammen gleiche Gröfse substituirt wird. Z. B. in II, 12. der Schlufs: «Die Quadrate der $\Gamma\Delta$, AB sind den Quadraten der ΓA, $A\Delta$, AB und dem zweimal von ΓA, $A\Delta$ eingeschlossenen Rechtecke gleich. Aber den Quadraten von $\Gamma\Delta$, AB ist das von der ΓB gleich — und den Quadraten von $A\Delta$, AB ist das von AB gleich. Folglich ist das Quadrat von ΓB den Quadraten von ΓA, AB und dem zweimal von ΓA, $A\Delta$ eingeschlossenen Rechtecke gleich.» Aehnlich in II, 13. Ferner in III, 36. «Das Rechteck aus $A\Delta$, ΔB nebst den Quadraten von ΓZ, ZE ist den Quadraten von ΔZ, ZE gleich. Aber den Quadraten von ΓZ, ZE ist das Quadrat von ΓE gleich — und den Quadraten von ΔZ, ZE ist das Quadrat der $E\Delta$ gleich. Folglich ist das Rechteck aus $A\Delta$, ΔB nebst dem Quadrat der $E\Gamma$ dem Quadrat der $E\Delta$ gleich. Die $E\Gamma$ ist aber der EB [und mithin das Quadrat der $E\Gamma$ dem Quadrat der EB] gleich. Folglich ist das Rechteck aus $A\Delta$, ΔB nebst dem Quadrat von EB dem Quadrat von $E\Delta$ gleich. Dem Quadrate von $E\Delta$ aber sind die Quadrate von EB, $B\Delta$ gleich — folglich ist das Rechteck aus EB, $B\Delta$ nebst dem Quadrat von EB den Quadraten von EB, $B\Delta$ gleich.»

Wenn diejenige, die man zu zwei gleichen hinzusetzt, eine der gleichen selber ist: so erhält man einerseits das Aggregat von beiden, andrerseits das Doppelte der letzten, und diese einander gleich. Also das Axiom: Das Aggregat zweier gleichen Gröfsen ist das Doppelte einer jeglichen derselben.» So wird geschlossen in II, 7. «Das AZ ist dem ΓE gleich; mithin sind die AZ, ΓE das Doppelte des AZ.» In II, 9. «Das Quadrat der $A\Gamma$ ist dem Quadrat der ΓE gleich: mithin sind die Quadrate der $A\Gamma$, ΓE das Doppelte des Quadrats der $A\Gamma$.» In III, 20. «Der Winkel EAB ist dem Winkel EBA gleich; folglich sind die Winkel EAB, EBA das Doppelte des Winkels EAB.»

(Zu Ax. 6.) Wenn zu einer jeden von zwei Gröfsen sie, die nämliche Gröfse, selber hinzugesetzt wird: so erhält man das Zweifache einer jeden von ihnen; und aus Axiom 2. als Folge das Axiom: «Die Zweifachen gleicher Gröfsen sind auch gleich.» Und wenn man zu den Zweifachen der gleichen Gröfsen wiederum die Gröfsen selber hinzusetzt; so erhält man die Dreifachen, und den Satz: die Dreifachen von gleichen Gröfsen sind auch gleich. Und ebenso schliefst man, dafs die Vierfache gleicher Gröfsen gleich seyen; und man sieht, dafs der Schlufs sich auf jede Gleichvielfache ausdehnen läfst, also jede Gleichvielfache gleicher Gröfsen einander gleich sind. Und diese Axiome gelten nicht nur von den Zweifachen, Dreifachen, Vierfachen u. s. w. im engeren Sinne, welche nämlich dieselbe Gröfse 2-, 3-, 4mal u. s. w. wiederholt bezeichnen; sondern auch von solchen, die 2-, 3-, 4mal u. s. w. so grofs sind als jene Gröfse, oder die den genannten Vielfachen derselben gleich sind: Wenn nämlich zwei Gröfsen einander gleich sind: so sind zwei andere, welche 2 oder 3 oder 4 oder irgend gleichviel mal so grofs sind, je eine als eine der ersteren, auch einander gleich. Namentlich, wenn je eine von zwei Gröfsen doppelt so grofs ist als je eine von zwei gleichen Gröfsen: so sind sie auch einander gleich. So wird in III, 14. geschlossen. «Die AZ ist der ΓH gleich. Nun ist von der AZ die AB das Doppelte, und von der ΓH die $\Gamma\Delta$ das Doppelte. Folglich ist auch die AB der $\Gamma\Delta$ gleich.» In I, 47. «Das

Dreieck $AB\Delta$ ist dem Dreieck $ZB\Gamma$ gleich. Es ist aber von dem Dreieck $AB\Delta$ das Parallelogramm $B\Delta$ das Doppelte — und von dem Dreieck $ZB\Gamma$ das Quadrat BH das Doppelte. Dinge aber, die von gleichen das Doppelte sind, sind einander gleich. Folglich ist auch das Parallelogramm $B\Delta$ dem Quadrat HB gleich.» In dieser Stelle heifst der wörtlich angeführte Grundsatz im Text: Τα των ισων διπλασια ισα αλληλοις εστι; welches allerdings zu dem unter den Axiomen stehenden Axiom Τα τε αυτε διπλασια ισα αλληλοις εστιν, als Ergänzung hinzugehört.

«Was doppelt so grofs ist als eines von zwei gleichen, ist auch doppelt so grofs als das andere.» So in I, 41. «Das Dreieck $AB\Gamma$ ist dem Dreieck $EB\Gamma$ gleich. Aber das Parallelogramm $AB\Gamma\Delta$ ist doppelt so grofs als das Dreieck $AB\Gamma$. Folglich ist auch das Parallelogramm $AB\Gamma\Delta$ doppelt so grofs als Dreieck $EB\Gamma$.» In II, 9. «Das Quadrat von EZ ist das Doppelte des Quadrats von HZ. Aber das Quadrat von HZ ist dem Quadrat von $\Gamma\Delta$ gleich. Folglich ist das Quadrat von EZ das Doppelte des Quadrats von $\Gamma\Delta$.» — Gesetzt nämlich, es seyen B und C einander gleich, und A sey doppelt so grofs als B: so wird A auch doppelt so grofs als C seyn. Denn da die B der C gleich ist, so ist nach dem vorher gesagten auch das Doppelte der B dem Doppelten der C gleich. Aber die A ist dem Doppelten der B gleich (Vorauss.); folglich ist auch (vermöge Ax. 1.) die A dem Doppelten der C gleich. — Daher auch bei einem Aggregat, das einer andern Gröfse gleichgesetzt wird, statt das Doppelte einer Gröfse das Doppelte der ihr gleichen substituirt werden darf.

«Wenn ein Ganzes in zwei oder mehrere Theile getheilt ist; so enthält das Doppelte des Ganzen das Doppelte von allen seinen Theilen.» — Denn es sey ein Ganzes A, dessen Theile a und α seyen; also A diesen beiden zusammen gleich. Und man setze zu den gleichen A, und $a+\alpha$ die gleichen A und $a+\alpha$ hinzu; so hat man $2A=2a+2\alpha$. — Daher auch, «Wenn die zwei Theile eines Ganzen von den zwei Theilen eines andern Ganzen, je einer von einem, das Doppelte sind: so wird auch das erste Ganze das Doppelte des andern Ganzen seyn.» Oder, «wenn die erste doppelt so grofs ist als die dritte, und die zweite doppelt so grofs als die vierte: so sind auch die erste und zweite zusammen doppelt so grofs als die dritte und vierte zusammen.» So in II, 9. Das Quadrat von EZ ist doppelt so grofs als das von $\Gamma\Delta$. Es ist aber auch das Quadrat von EA doppelt so grofs als das von $A\Gamma$. Folglich sind die Quadrate von AE, EZ doppelt so grofs als die Quadrate von $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$.» In III, 20. «Der Winkel BEZ ist das Doppelte des Winkels EAB — und der $ZE\Gamma$ ist das Doppelte des $EA\Gamma$. Folglich ist auch der ganze Winkel $BE\Gamma$ das Doppelte des Ganzen $BA\Gamma$.» In II, 8. ein analoger Schlufs die Vierfachen betreffend: «Die vier Figuren AH, $M\Pi$, $\Pi\Delta$, PZ sind das Vierfache der AH. Nach dem Bewiesenen sind aber auch die vier ΓK, $K\Delta$, HP, PN das Vierfache der ΓK. Folglich sind die acht Figuren, welche den Gnomon ΣTY einschliefsen, das Vierfache der [aus AH und ΓK bestehenden] AK.» Der analoge allgemeine Satz, der sich auf jede Gleichvielfache und jede Anzahl von Gröfsen erstreckt, findet sich in El. V, 1. ausgesagt und bewiesen.

Zufolge dieses darf wiederum in einem Aggregat, das einer andern Gröſse gleichgesetzt wird, statt des Doppelten einer Gröſse das Doppelte von allen ihren Theilen substituirt werden, und umgekehrt.

Zu Axiom 4. Beim Hinzusetzen gleicher oder einerlei Gröſsen zu ungleichen, oder ungleicher zu gleichen oder einerlei Gröſse haben ebenfalls die den zu Ax. 2. bemerkten analogen Fälle Statt.

Beispiele. In I, 17. «Der — Winkel $A\Gamma\Delta$ ist gröſser als der — $AB\Gamma$. Man setze den gemeinschaftlichen Winkel $A\Gamma B$ hinzu: so sind mithin die Winkel $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ gröſser als die $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$.» In I, 29. «Es sey der Winkel $AH\Theta$ gröſser als der $H\Theta\Delta$. Man setze den gemeinschaftlichen $BH\Theta$ hinzu: so sind demnach die Winkel $AH\Theta$, $BH\Theta$ gröſser als die Winkel $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$.» In I, 21. «Die zwei Seiten AB, AE sind gröſser als die BE. Man setze die gemeinschaftliche $E\Gamma$ hinzu: so sind also die BA, $A\Gamma$ gröſser als die BE, $E\Gamma$. — Wiederum — die zwei Seiten ΓE, EA sind gröſser als die $\Gamma\Delta$. Man setze die gemeinschaftliche ΔB hinzu: so sind mithin die ΓE, EB gröſser als die $\Gamma\Delta$, ΔB.» Auch mit mehreren Hinzusetzungen auf einmal, in XI, 21. «Die Winkel ΓBA, ABA sind gröſser als der $\Gamma B\Delta$. Ebenso sind auch die Winkel $B\Gamma A$, $A\Gamma\Delta$ gröſser als der $B\Gamma\Delta$; und die Winkel $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$ gröſser als der $\Gamma\Delta B$. Folglich sind die sechs Winkel ΓBA, $AB\Delta$, $B\Gamma A$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta\Gamma$, $A\Delta B$ gröſser als die drei $\Gamma B\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta B$.»

Wenn mehrere Gröſsen mehreren Theilen eines Ganzen, je eine einem Theile gleich sind, dieses aber nicht alle Theile des Ganzen sind: so ist das Ganze gröſser als die genannten Gröſsen zusammen. Dieser Schluſs kommt vor in III, 12. «Die AH ist der $H\Delta$ gleich; und es ist auch die $Z\Delta$ der $Z\Gamma$ gleich bewiesen worden. Mithin sind die $Z\Delta$, AH den $Z\Gamma$, ΔH gleich [welches Theile der ZH sind, aber nicht alle,] Folglich ist die ganze ZH gröſser als die $Z\Delta$, AH.»

Zusatz zu Ax. 4. Noch viel mehr: Wenn zu zwei ungleichen Gröſsen ungleiche hinzugesetzt werden, und zwar zu der gröſsern die gröſsere, zu der kleinern die kleinere; ist das Aggregat der zwei gröſsern gröſser als das Aggregat der zwei kleinern.

Ein specieller Fall hievon ist: Von zwei ungleichen Gröſsen ist das Doppelte der gröſsern gröſser als das Doppelte der kleinern. Und so auch weiter das Dreifache, Vierfache und andere Gleichvielfache. Vermittelst dieses läſst sich

Axiom 7. darthun: Von gleichen Gröſsen sind auch die Hälften gleich: oder Gröſsen, deren Doppelte gleich sind, sind selbst einander gleich.

Es seyen die gleichen Gröſsen A, B; und a die Hälfte von A, b die Hälfte von B: so wird auch die a der b gleich seyn. Denn wären sie ungleich: so ist die eine gröſser; es sey a die gröſsere. Da nun die a gröſser als die b ist: so wird nach dem Vorhergehenden auf das Doppelte der a gröſser seyn als das Doppelte der b. Das Doppelte der a ist aber A, und das Doppelte der b ist B. Folglich wäre die A gröſser als die B. Sie ist ihr aber auch gleich (Vorauss.): welches unmöglich ist. Also können die a und b nicht ungleich seyn, sie sind also gleich.

Zusatz. Und wenn eine Gröfse gröfser oder kleiner ist als eine andere; so ist auch ihre Hälfte gröfser oder kleiner als die Hälfte der andern. Dieses läfst sich auf ähnliche Art erweisen.

Beispiele. In I, 37. «Die Parallelogramme $EBΓA$, $ABΓZ$ sind gleich. Nun — ist vom Parallelogramm $EBΓA$ die Hälfte das Dreieck $ABΓ$ — vom Parallelogramm $ABΓZ$ aber die Hälfte das Dreieck $ΔBΓ$. Von gleichen sind aber auch die Hälften gleich. Folglich ist das Dreieck $ABΓ$ dem Dreieck $ΔBΓ$ gleich.» Aehnlich ist der Schlufs in I, 38. Der hier wörtlich im Text stehende Grundsatz heifst: *Τα των ισων ἡμιση ισα αλληλοις εσιν*; was als Beisatz zu dem unter den Axiomen stehenden Axiom 7.: *Τα τϐ αυτϐ ἡμιση ισα αλληλοις εσι*, zu bemerken ist.

Nach dem andern obigen Ausdruck lautet der Schlufs in III, 22. «Der Winkel $AZΔ$ ist das Doppelte des Winkels $BAΔ$. — Aber der Winkel $BZΔ$ ist auch das Doppelte des Winkels $BEΔ$. Mithin ist der Winkel $BAΔ$ dem Winkel $BEΔ$ gleich.» In III, 14. «Die AB ist das Doppelte der AZ; und die $ΓΔ$ das Doppelte des $ΓH$. Nun ist die AB der $TΔ$ gleich. Folglich ist auch die AZ der TH gleich.»

Den zu Ax. 2. gemachten Bemerkungen und Zusätzen entsprechen analoge zu Ax. 4. Z. B. wenn zwei Gröfsen ungleich sind; so ist ihre Summe gröfser als das Doppelte der kleinern, und kleiner als das Doppelte der gröfsern. Daher ferner die gröfsere gröfser, die kleinere kleiner als ihre halbe Summe. Und wenn eine Gröfse in zwei ungleiche Theile getheilt ist: so ist ihr gröfserer Theil gröfser als ihre Hälfte, der kleinere kleiner. — Ferner, wenn zwei Gröfsen zusammen gröfser sind als die dritte: so ist die Summe aller drei zusammen gröfser als das Doppelte der dritten, aber kleiner als das Doppelte der zwei erstern zusammen, Welches bei El. I, 20. seine Anwendung findet.

In Absicht auf die Art, wie die durch die Hinzusetzungen entstehenden Aggregate im Euclid'schen Texte bezeichnet werden, kann man Folgendes bemerken. Wenn man von zwei Winkeln sagt, sie seyen zwei rechte; so versteht sich, dafs jeder von ihnen ein rechter sey: wenn man aber sagt, sie seyen zweien rechten gleich; so heifst dieses nicht, jeder ist einem rechten gleich, sondern nur, mit einander sind sie so grofs als zwei rechte. Wenn man sagt, die zwei Gröfsen A, B seyen der dritten $Γ$ gleich, oder die $Γ$ sey den zweien A, B gleich: so könnte man anstehen, ob dieses sensu diviso zu verstehen sey, dafs jede der beiden A, B der $Γ$ gleich sey; in diesem Falle setzt aber Euklid: *ἑκατερα των A, B τη Γ ιση εσι*; wie in den Beweisen von I, 1. 2. 3. 45.: oder sensu composito, dafs die zwei A, B zusammen der $Γ$ gleich seyen; und in diesem Sinne ist jener Ausdruck bei Euklid zu nehmen: und so auch, wenn er von zwei Gröfsen sagt, dafs sie zweien andern gleich, oder gröfser oder kleiner seyen: nämlich sensu composito, da beiderseits die Summen zu verstehen sind. So in I, 13. *ἡ ὑπο ΓBΔ δυσι ταις ὑπο ΓBA, ABE ιση εσι; αι ὑπο ΓBE, EBΔ ταις ὑπο ΔBA, ABΓ ισαι εισι*; so in den Beweisen und zum Theil auch Expositionen von I, 14. 15. 17. 18. 28. 29. 32.; ferner in den Aussagen von I, 21. 32. 47. 48. Z. B. *αι συναθεισαι των λοιπων τϐ τριγωνϐ δυο πλευρων ελασσονες εσονται*; —

ἡ ἐκτος γωνια δυσι ταις εντος και απεναντιον ιση ἐστι· και αἱ εντος τϑ τριγωνϑ τρεις γωνιαι δυσιν ορθαις ισαι εισιν u. s. w. — Den Fall, dafs von zwei Gröfsen und zwei andern die eine der einen, und die andere der andern gleich sey, bezeichnet er durch den Beisatz ἑκατερα ἑκατερᾳ; wie in I, 4. 7. 8. 24. 25. 26. in Aussage, Exposition und Conclusion, und auch sonst bei Anwendung der genannten Sätze in den Beweisen.

Von verschiedenen Arten, Aggregate zu bezeichnen, theils durch die Conjunctionen και, τε-και, και ετι, theils durch die Praepositionen μετα, συν, weiter durch die Redensarten μεταλαμβανομενα, συναμφοτερα, συγκειμενον εκ-, ὡς μια, findet man Beispiele in I, 43. Beweis, und besonders in den Aussagen der Sätze des II. B. 1 — 10.

Hieher gehört auch noch der Ausdruck (oder Schlufs): Wenn eine Gröfse zweien andern Gröfsen zusammen gleich ist; so heifst (oder ist) sie gröfser als eine dieser letztern um die andere. Und eine der beiden letztern heifst (oder ist) kleiner als die erstere um die übrige der letztern. So in XI, 23. Lehnsatz. «Das Quadrat von AB ist den Quadraten von $A\Gamma$, ΓB gleich. Die $A\Gamma$ aber ist der $A\Xi$ [und daher auch das Quadrat von $A\Gamma$ dem Quadrat von $A\Xi$] gleich. Folglich ist das Quadrat von AB gröfser als das Quadrat von $A\Xi$ um das Quadrat von ΓB.» So in II, 12. «Das Quadrat von ΓB ist gleich den Quadraten von ΓA, AB und dem zweimal von ΓA, $A\Delta$ eingeschlossenen Rechtecke. Mithin ist das Quadrat von ΓB gröfser als die Quadrate von ΓA, AB um das zweimal von ΓA, $A\Delta$ eingeschlossene Rechteck.» Ebenso in II, 13. Beweis: wie denn auch in den Aussagen dieser beiden letztern Sätze selber jene Redensart gebraucht wird.

Axiom 3.

läfst sich auf Axiom 4. reduciren. Es seyen zwei gleiche Gröfsen A, a, von denen die gleichen Theile B, b hinweggenommen werden; und die übrigen Theile oder Reste seyen R, r: so wird behauptet, dafs diese gleich seyen. Denn wären sie nicht gleich; so ist der eine von ihnen gröfser als der andere: es sey R der gröfsere. Da nun R gröfser als r ist; so werden, wenn man die gleichen B, b hinzusetzt, die B, R zusammen gröfser seyn als die b, r zusammen, nach Ax. 4. Den B, R zusammen aber ist die A gleich; nämlich das Ganze seinen Theilen (nach Ax. 9. Zus.); und ebenso ist den b, r zusammen die a gleich. Folglich ist auch die A gröfser als die a (nach obigem Axiom C.). Sie ist ihr aber auch gleich, nach der Voraussetzung; welches unmöglich ist. Also können die R, r nicht ungleich seyn: sie sind also gleich.

Zu dem Axiom, wie es im Texte steht, ist hinzuzusetzen: Auch wenn einerlei (Gröfse) von gleichen (Gröfsen), oder gleiche (Gröfsen) von einerlei (Gröfse) weggenommen werden, sind die Reste gleich.

Beispiele in den Elementen

1) für den Fall, da einerlei Gröfse oder ein gemeinschaftlicher Theil von gleichen Gröfsen weggenommen wird.

In I, 35. «Das Dreieck EAB ist dem Dreieck $A\Gamma Z$ gleich. Man nehme das gemeinschaftliche AHE hinweg: so ist mithin das

übrige Trapez $ABH\Delta$ dem übrigen Trapez $EH\Gamma Z$ gleich.» II, 11. «Das Parallelogramm ZK ist dem $A\Delta$ gleich: man nehme das gemeinschaftliche AK hinweg; so ist mithin das $Z\Theta$ dem $\Theta\Delta$ gleich.» Ferner zu dem im Texte nicht erwähnten Fall beim Beweise von I, 35., da der Punkt E zwischen A und Δ fällt, gehört ebenfalls der Schluſs: «Die $A\Delta$ ist der EZ gleich. Man nehme die gemeinschaftliche ΔE hinweg: so ist die übrige AE der übrigen ΔZ gleich.» — Allgemein besagen diese Schlüsse: «Wenn zwei gleiche Gröſsen einen Theil gemeinschaftlich haben; so sind ihre übrigen Theile gleich.»

In III, 32. wird geschlossen: «Der Winkel ABZ ist den Winkeln $BA\Delta$, $AB\Delta$ gleich. Man nehme den gemeinschaftlichen $AB\Delta$ hinweg: so ist mithin der übrige ΔBZ dem $BA\Delta$ gleich.» Das heiſst allgemein: «Wenn ein Ganzes einem seiner Theile und einer andern Gröſse zusammen gleich ist; so ist sein übriger Theil dieser andern Gröſse gleich.»

In I, 19. «Die Winkel ΓBA, ABE sind den Winkeln ΓBA, $AB\Delta$ gleich. Man nehme den gemeinsch. $AB\Gamma$ hinweg: so ist mithin der übrige ABE dem übrigen $AB\Delta$ gleich.» In I, 15. «Die Winkel ΓEA, $AE\Delta$ sind den Winkeln $AE\Delta$, ΔEB gleich. Man nehme den gemeinschaftlichen $AE\Delta$ hinweg: so ist mithin der übrige ΓEA dem übrigen $BE\Delta$ gleich.» Ebenso in I, 28. — In II, 11. «Das Rechteck aus ΓZ, ZA nebst dem Quadrat von AE ist den Quadraten von BA, AE gleich. Man nehme das gemeinsch. Quadrat von AE hinweg. So ist mithin das übrige Rechteck aus ΓZ, ZA dem Quadrat von AB gleich.» In II, 14. «Das Rechteck aus BE, EZ nebst dem Quadrat von HE ist den Quadraten von ΘE, EH gleich. Man nehme das gemeinsch. Quadrat von HE hinweg: so ist mithin das übrige Rechteck aus BE, EZ dem Quadrat von $E\Theta$ gleich.» Ebenso in III, 35. 36. — Allgemein: «Wenn zwei Gröſsen, jede mit einer nämlichen dritten zusammengenommen, gleiche Aggregate geben; so sind die ersten zwei Gröſsen einander gleich.»

2) Der Fall, da gleiche Gröſsen von einerlei Gröſse hinweggenommen werden, kommt in demjenigen Beweise von I, 35. vor, welchen Rob. Simson nach Clairaut adoptirt hat (S. Matthias S. 15.) und in demjenigen, der sich diesem analog von XI, 29. führen läſst. — Die allgemeine Form dieses Schlusses ist: Wenn von einerlei Gröſse ein Theil, und wiederum ein anderer dem vorigen gleicher Theil hinweggenommen werden: so sind die beiderseits übrigbleibenden Theile einander gleich.

3) Für den Fall, da gleiche von gleichen weggenommen werden. In I, 2. «Die $A\Lambda$ ist der ΔH gleich. Davon [ὧν] ist [das Stück] die $A\Delta$ der AB gleich. Folglich ist auch die übrige $\Lambda\Delta$ der übrigen BH gleich.» In I, 5. «Da die ganze AZ der ganzen AH gleich ist, und von diesen [das Stück,] die AB der $A\Gamma$ gleich ist: so ist mithin die übrige BZ der übrigen ΓH gleich.» Und wiederum: «Da der ganze Winkel ABH dem ganzen Winkel $A\Gamma Z$ gleich bewiesen worden, und davon der Winkel ΓBH dem $B\Gamma Z$ gleich ist: so ist mithin der übrige $AB\Gamma$ dem übrigen $A\Gamma B$ gleich.» In III, 26. «Der Abschnitt $BA\Gamma$ ist dem Abschnitt $E\Delta Z$ gleich. Es ist aber auch der ganze Kreis $AB\Gamma$ dem ganzen ΔEZ gleich. Folglich ist der übrige Abschnitt $BK\Gamma$ dem übrigen Abschnitt $E\Delta Z$ gleich.» In III, 28. «Der Bogen $BH\Gamma$ ist dem Bogen $E\Theta Z$ gleich. Es ist

aber auch der ganze Kreis [die Kreislinie] $ABΓ$ dem ganzen Kreis AEZ gleich. Folglich ist auch der übrige Bogen $BAΓ$ dem übrigen $EΔZ$ gleich.» Die Schlufsform in den zwei letztern Beispielen ist: «Wenn eine Gröfse einer andern gleich ist, und das Ganze, davon die erste ein Theil ist, dem Ganzen, davon die andere ein Theil ist, gleich ist; so wird auch der übrige Theil des ersten Ganzen dem übrigen Theil des andern Ganzen gleich seyn.» Oder nach den vorhergehenden Beispielen: «Wenn jedes von zwei gleichen Ganzen in zwei Theile getheilt ist, und der eine Theil dem einen gleich ist: so wird auch der andere Theil dem andern gleich seyn.» So auch nach I, 43., wo es heifst: „Das Dreieck AEK nebst dem $KHΓ$ ist dem Dreieck $AΘK$ nebst dem Dreieck $KZΓ$ gleich. Es ist aber auch das ganze Dreieck $ABΓ$ dem ganzen $AΔΓ$ gleich. Folglich ist der Rest, die Ergänzung BK, dem Reste, der Ergänzung $KΔ$ gleich.» Nämlich, wenn jedes von zwei gleichen Ganzen in drei Theile getheilt ist, und zwei des einen zweien des andern gleich sind: so ist auch der dritte dem dritten gleich.

In II, 4. Beweis 2. «Die drei Winkel $ABΔ$, $AΔB$, $BAΔ$ sind 2 rechten gleich. Der $BAΔ$ ist aber ein rechter: Folglich sind die übrigen $ABΔ$, $AΔB$ einem rechten gleich.» In II, 9. «Da der Winkel bei $Γ$ ein rechter ist; [die drei Winkel aber, der bei $Γ$ und die $EAΓ$, $AEΓ$ 2 rechte gleich sind; dieses ist hinzuzudenken]: so sind mithin die übrigen $EAΓ$, $AEΓ$ einem rechten gleich.» Noch kürzer lautet das Enthymema in III, 32. «Der Winkel $AΔB$ — ist ein rechter. Folglich sind die übrigen Winkel $BAΔ$, $ABΔ$ [im Dreieck $ABΔ$] einem rechten gleich.» Die Schlufsform ist hier: «Wenn drei Gröfsen zusammen das Doppelte einer gewifsen Gröfse sind, und eine der ersteren dieser letztern gleich ist: so sind die zwei übrigen von den ersteren zusammen dieser letztern auch gleich. Wiederum, wenn drei Gröfsen zusammen das Doppelte einer gewifsen Gröfse sind, und von den ersteren eine dieser letztern gleich, eine andere die Hälfte der letzteren ist: so ist auch die dritte die Hälfte der letztern. Letzterer Schlufs kommt vor in II, 9. «Da der Winkel HEZ ein halber rechter ist, der EHZ aber ein rechter [und die drei Winkel HEZ, EHZ, EZH 2 rechten gleich sind]: so ist mithin der übrige Winkel EZH ein halber rechter.» Ebend. «wiederum da der Winkel bei B ein halber rechter ist, der $ZΔB$ aber ein rechter: so ist mithin der übrige Winkel $ΔZB$ ein halber rechter.» Ebenso in II, 10.

In III, 14. «Die Quadrate von AZ, ZE sind den Quadraten von $ΓH$, HE gleich; von diesen ist aber das Quadrat von AZ dem Quadrat von $ΓH$ gleich: — Folglich ist das übrige Quadrat von ZE dem Quadrat von EH gleich.» Ebendas. «Die Quadrate von EZ, ZA sind den Quadraten von EH, $HΓ$ gleich: von diesen ist aber das Quadrat von EZ dem Quadrat von EH gleich — folglich ist das übrige Quadrat von AZ dem übrigen Quadrat von $ΓH$ gleich.» Allgemein: «Wenn zwei Gröfsen zusammen zweien andern zusammen gleich sind, und eine der ersten einer der andern gleich ist: so ist auch die übrige der übrigen gleich.»

Zusatz. In III, 20. wird so geschlossen: «Der Winkel $HEΓ$ ist das Doppelte des Winkels $HΔΓ$, und von diesen ist der Winkel $BEΓ$ das Doppelte des Winkels $HΔB$. Folglich ist der übrige $BEΓ$ das Doppelte des übrigen $BΔΓ$.» Das heist allgemein ausgedrückt: «Wenn ein Ganzes von einem Ganzen, und ein Theil des ersten von

einem Theil des andern das Doppelte ist: so wird auch der übrige Theil vom übrigen Theil das Doppelte seyn.» Es sey das ganze A, dessen Theile B, C seyen, das Doppelte von dem Ganzen a, und der Theil B das Doppelte von dem Theile b: so wird auch der übrige Theil C von dem übrigen c das Doppelte seyn.

Denn man nehme das Doppelte von c; es sey C'. Da nun B von b, und C' von c das Doppelte ist: so wird auch (nach dem, was oben zu Ax. 2. hinzugesetzt worden ist) das aus B, C' bestehende Ganze von dem aus b, c bestehenden, das ist, von a das Doppelte seyn. Es ist aber auch A das Doppelte von a. Folglich ist (nach dem, was weiter zu Ax. 2. bemerkt worden) das aus B und C' bebestehende Ganze dem A gleich. Das A aber ist seinen Theilen B, C zusammen gleich. Folglich sind die B, C' den B, C zusammen gleich; und wenn man das gemeinsch. B hinwegnimmt, so ist auch das C' dem C gleich. Das C' ist aber das Doppelte von c (Constr.). Folglich ist auch das C, welches der übrige Theil von A war, das Doppelte von c, dem übrigen Theil von a: welches zu beweisen war. Allgemeiner und auf jede Gleichvielfache ausgedehnt, findet sich der Satz in El. V. 5.

Axiom 5.

enthält den Gegensatz von Ax. 3., und läfst sich auf ähnliche Weise indirect durch Ax. 2. u. 4. darthun, wie oben Ax. 3. durch Ax. 4. dargethan wurde. Es sind dabei folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn von ungleichen Ganzen oder Aggregaten einerlei oder ein Gemeinschaftliches weggenommen wird, Die Reste sind alsdann ungleich, nämlich der Rest des Gröfsern der Ungleichen ist der gröfsere.

Beispiele. In III, 11. Beweis 1. «Da die AH, HZ gröfser sind als die ZA, das ist, als die $Z\Theta$: — so nehme man die gemeinschaftliche ZH hinweg; so ist mithin die übrige AH gröfser als die übrige $H\Theta$.» Ebend. Beweis 2. «Da die AH, HZ gröfser sind als AZ; die ZA aber der $Z\Gamma$, das ist, der $Z\Theta$ gleich ist: so nehme man die gemeinsch. ZH hinweg; so ist mithin die übrige AH gröfser als die übrige $H\Theta$.» In III, 7. «Die HZ, ZE sind gröfser als $E\Delta$. Man nehme die gemeinsch. EZ hinweg; so ist mithin die übrige HZ gröfser als die übrige $Z\Delta$.» Allgemeiner heifst dieses: «Wenn ein Theil eines Ganzen nebst einer andern Gröfse gröfser ist als das Ganze: so ist die andere Gröfse gröfser als der übrige Theil des Ganzen.»

2) Wenn von Ungleichen Gleiche weggenommen werden; so ist der Rest des gröfsern der Ungleichen gröfser.

Beispiele. In III, 8. «Da die MK, $K\Delta$ gröfser als die $M\Delta$ sind, die MH aber der MK gleich ist: so ist mithin die übrige $H\Delta$ gröfser als die übrige $H\Delta$; daher auch die ΔH kleiner als die ΔK.» In XI, 20. «Da die ΔB, $\Delta\Gamma$ gröfser sind als die $B\Gamma$, und — — die ΔB der BE gleich ist: so ist auch die übrige $\Delta\Gamma$ gröfser als die übrige $E\Gamma$.» Hier war das eine der Ungleichen ein Ganzes, das andere ein Aggregat zweier Gröfsen, und diesen Beispielen entspricht der allgemeine Satz: «Wenn zwei Gröfsen $\left.\begin{matrix}\text{gröfser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ sind als ein Ganzes, wovon eine derselben ein Theil ist, so ist auch die andere $\left.\begin{matrix}\text{gröfser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als der übrige Theil des Ganzen.»

In III, 31. «Da die zwei Winkel $ABΓ$, $BAΓ$ kleiner als zwei rechte sind; der $BAΓ$ aber ein rechter ist: so ist mithin der Winkel $ABΓ$ kleiner als ein rechter.» Allgemein: «Wenn die erste und zweite zusammen kleiner als das Doppelte der dritten sind; die zweite aber der dritten gleich ist: so ist die erste kleiner als die dritte.»

In III, 8., «Die MK, $KΔ$ sind kleiner als die $MΔ$, $ΔΔ$: Es ist aber die MK der $MΔ$ gleich: Folglich ist die übrige $ΔK$ kleiner als die übrige $ΔΔ$.» Hier sind die beiden Ungleichen Aggregate zweier Gröfsen; und der entsprechende allgemeine Satz ist: «Wenn zwei Gröfsen zusammen gröfser sind als zwei andere, eine der ersten aber einer der andern gleich ist: so ist die übrige von den ersten gröfser als die übrige von den andern.»

3) «Wenn Ungleiche von Gleichen (oder auch von Einerlei) weggenommen werden: so läfst die hinweggenommene gröfsere der Ungleichen einen kleinern Rest.»

In III, 31. «Die Winkel $ABΓ$, $AΔΓ$ sind 2 rechten gleich. Nun ist der $ABΓ$ kleiner als ein rechter: folglich ist der übrige $AΔΓ$ gröfser als ein rechter.» Allgemein: «Wenn die erste und zweite zusammen das Doppelte der dritten sind, die erste aber gröfser / kleiner ist als die dritte: so ist die zweite kleiner / gröfser als die dritte.» — So in XI, 21. «Die neun Winkel $ΓBA$, $AΓB$, $BAΓ$, $AΓΔ$, $ΔAΓ$ $ΓΔA$, $AΔB$, $ΔBA$, $BAΔ$ sind 6 rechten gleich. Von diesen sind aber die sechs $ABΓ$, $BΓA$, $AΓΔ$, $ΓΔA$, $AΔB$, $ΔBA$ gröfser als 2 rechte. Folglich sind die übrigen drei $BAΓ$, $ΓAΔ$, $ΔAB$ — — kleiner als 4 rechte.» Ueberhaupt, «Wenn zwei oder mehrere Gröfsen eine gewifse Summe ausmachen; und eine oder einige derselben weniger / mehr als einen gewifsen Theil dieser Summe ausmachen: so macht die übrige, oder machen die übrigen Gröfsen mehr / weniger als den übrigen Theil jener Summe aus.»

Zusatz zu Ax. 5. Auch wenn Ungleiche von Ungleichen weggenommen werden, und zwar Kleineres vom Gröfsern der Ungleichen: so läfst dieses einen gröfsern Rest, als Gröfseres vom Kleineren der Ungleichen weggenommen.

Man bemerke auch den Fall in X, 1. Bew. 1. «Da die AE gröfser ist als die AB, und man von der AE weniger als die Hälfte, nämlich EH, von der AB mehr als die Hälfte, nämlich $ΘB$, weggenommen hat: so ist der Rest HA gröfser als der Rest $ΘA$.» Ferner: „Da die HA gröfser ist als die $ΘA$; und von der HA die Hälfte, nämlich HZ, von der $AΘ$ aber mehr als die Hälfte, nämlich $ΘK$, weggenommen worden: so ist mithin der Rest AZ gröfser als der Rest AK.»

Die Frage betreffend, um wie viel ein Rest gröfser als ein anderer sey? so ist, wie Proclus anmerkt, in den Fällen 1—3. vorhin, der Unterschied der Reste dem Unterschied der Ungleichen, die man in der Bedingung hatte, gleich. Im letztern Falle dieses Zusatzes aber wird der Unterschied der Reste der Summe der beiden Unterschiede der Ungleichen gleich seyn. (S. Chrestom. geom. pag. 132. 133.)]

Axiome. Zweite Klasse.

Fortsetzung von Pfleiderers Erklärung der Axiome.

Ueber deren zweite Klasse (s. oben nr. 2.), die speciell-geometrischen.

18. Was man auch von dem Sinn der Def. 4. halten mag: so ist es jedenfalls besser, folgende Eigenschaften gerader Linien, die in der Folge zu den Beweisen nöthig sind, ausdrücklich unter dem Titel von Axiomen vorzutragen:

Zwei gerade Linien in einerlei Ebene haben keinen ausgedehnten Theil (oder keinen Abschnitt) mit einander gemeinschaftlich. Wenn demnach zwei der Lage nach verschiedene gerade Linien in derselben Ebene einander begegnen: so berühren sie einander daselbst nur in Einem Punkte, oder sie schneiden einander; die aber einen ausgedehnten Theil mit einander gemein haben, oder einem solchen Theil nach auf einander gelegt werden, die fallen, verlängert so weit man will, zusammen, oder sie liegen geradefort aufeinander.

Ferner fallen vermöge des Axioms 12. zwei begränzte gerade Linien zusammen, wenn ihre Enden zusammen fallen; oder zwei gerade Linien, welche die nämlichen Endpunkte haben, decken einander; und zwischen zwei Punkten kann nicht mehr als Eine gerade Linie liegen oder gezogen werden; und zwei gerade Linien schneiden einander nicht in mehr als Einem Punkte; und sie durchkreuzen einander daselbst dermafsen, dafs die Abschnitte der einen auf verschiedene Seiten der Abschnitte der andern fallen.

Die Anwendungen des Axioms 8. im Folgenden setzen als aus dem gemeinen Begriffe der ebenen Fläche bekannt voraus: Dafs eine Ebene sich so auf eine andere legen lasse, dafs sie ihrer ganzen Ausdehnung nach mit ihr zusammenfalle.

Dafs die im 8. Axiom erforderte Congruenz (Deckung) durch den Verstand erkannt werden müsse, wird von allen anerkannt, welche sich des 8. Axioms, als eines keiner weitern Einschränkung unterworfenen und schon um seiner Leichtigkeit willen höchst einleuchtenden Princips, auf die gehörige Weise, nach Euklids und anderer alten Geometer Beispiel, bedienen.

Die Congruenz reducirt sich auf das Einnehmen, Besetzen, Ausfüllen des nämlichen Orts oder Raums: woraus eine etwelche Identität und Einswerden der

Gröfsen resultirt; ja, sofern sie wirklich einander decken, hören sie auf zwei zu seyn.

Dinge, die einander decken können, sind gleich. Das wirkliche Decken hat keinen andern Zweck, als das Deckenkönnen zu zeigen, und zum offenbaren Beweis desselben zu dienen; dieses Können (potentia) wird durch jenes Wirklichmachen (actus) dargethan; und für letzeres ist eine ausdrückliche Ableitung aus den zu Grunde liegenden Bedingungen gewöhnlich und erforderlich.

19. Aber nicht jede Linien, Winkel, Figuren, welche gleich sind, können mit Beibehaltung des eigentlichen Begriffs von Decken, welchen auch Euklid festhält, einander decken. Blofs von geraden Linien und geradlinigten Winkeln nimmt Euklid an, dafs sie, wenn sie einander gleich sind, auch einander decken können: welcher Annahme Gültigkeit sich auch leicht zeigen läfst. Nämlich

1. (*Fig.* 1.a.) Zwei gleich gerade Linien AB, CD in derselben Ebene, oder in zwei auf einander gelegten Ebenen, so nach einerlei Richtung auf einander gebracht, dafs ihre Endpunkte A, C zusammenfallen, werden einander decken, und ihre andern Endpunkte B, D werden auch zusammenfallen. Denn da man setzt, die beiden geraden Linien erstrecken sich in derselben Ebene oder in zwei zusammenfallenden Ebenen nach der nämlichen Seite hin von dem gemeinschaftlichen Punkte A, C an in gerader Richtung: so wird der Punkt D auf einen Punkt der geraden Linie AB an dieser Seite fallen (nr. 17.). Er wird aber nicht auf einen Punkt derselben, E, fallen, der disseits B liegt; noch auch auf einen Punkt F ihrer Verlängerung über B hinaus. Sonst würde die gerade Linie CD die gerade AE oder AF decken, und ihr gleich seyn (Ax. 8.); von welchen die erstere kleiner, die andere gröfser als die AB ist (Ax. 9.): und folglich wäre auch die CD kleiner oder gröfser als die AB (nr. 9.); gegen die Voraussetzung. Mithin fällt der Punkt D auf B; und also deckt die gerade Linie CD die gerade AB, welcher sie gleich ist.

2. (*Fig.* 1. b.) Ebenso, zwei geradlinigte ebene Winkel CAB, FDE, deren Ebenen so auf einander gelegt werden, dafs die Spitzen D, A zusammenfallen, und ihre Schenkel DE, AB sich nach einerlei Seite hin in gerader Richtung erstrecken, auch die Winkel an der nämlichen Seite dieser Schenkel liegen, decken einander: d. h. ihre andern Schenkel DF, AC werden auch in ei-

nerlei Richtung nach einerlei Seite hin fallen. Denn es wird der Schenkel DF in der nach der Voraussetzung nunmehr gemeinschaftlichen Ebene der beiden Winkel, nicht auf eine gerade Linie AG oder AH innerhalb oder aufserhalb des Winkels CAB fallen. Sonst würde der Winkel FDE den Winkel GAB oder HAB decken, und ihm (Ax. 8.) gleich seyn; von welchen der erste kleiner, der zweite gröfser ist als der Winkel CAB (Ax. 9.); und mithin wäre auch (nr. 9.) der Winkel FDE kleiner oder gröfser als der Winkel CAB; gegen die Voraussetzung.

20. Als im Begriff einer Figur theils an sich, theils in Verbindung mit Postulat 2., enthalten wird Folgendes angesehen:

1) Eine gerade Linie, die innerhalb irgend einer gegebenen ebenen Figur liegt, oder in der Ebene derselben durch einen Punkt innerhalb derselben gezogen wird, läfst sich auf beiden Seiten so verlängern, dafs sie dem Perimeter der Figur in wenigstens zwei Punkten begegne, und weiter fortgezogen ihn schneide, und aufserhalb der Figur falle.

2) Wenn von zwei in einerlei Ebene beschriebenen Figuren eine jede *) zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb der andern liegt; so schneiden sich ihre Perimeter, oder gehen durch einander hindurch, in wenigstens zwei Punkten.

3) Eine unbegränzte gerade Linie theilt die unbegränzte Ebene, in der sie liegt, dergestalt: dafs, wenn man in dieser Ebene an verschiedenen Seiten der geraden Linie zwei Punkte nimmt, eine gerade Linie, welche diese Punkte verbindet, durch die erstere irgendwo hindurch geht, oder sie in einem Punkte schneidet.

21. Es ist zwar im Folgenden manchmal der Fall, dafs Dinge bewiesen werden, oder gelehrt wird, wie man Dinge bewerkstelligen solle, die für sich schon klar und leicht genug sind. Allein die Gesetze der strengen Methode und der Zweck und die Natur eines Systems erfordern Beschränkung der Axiome und Postulate auf die möglich geringste Anzahl.

---

*) Nicht blofs die eine: Denn z. B. von zwei concentrischen Kreisen liegt auch der gröfsere zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des andern, und doch schneiden ihre Peripherien einander nicht.

Bis hieher Pfleiderers Erläuterung der Axiome, welche nebst der vorhergehenden der Definitionen und Postulate, so wie sie von Pfleiderer lateinisch abgefafst war, in der Chrestomathia geom. pag. 279—296. steht. Noch einige Anmerkungen des Herausgebers.

a) Dafs es unmöglich sey, dafs gerade Linien einen gemeinschaftlichen Abschnitt haben, wird ausdrücklich gesagt und gebraucht beim Beweise, den Euklid von XI, 1. gibt.

In diesem Grundsatz ist enthalten: dafs, wenn eine gerade Linie auf eine andere so gebracht wird, dafs sie in einem Theil ihrer Ausdehnung mit einander zusammenfallen, sie auch in dem übrigen Theile ihrer Ausdehnung, so weit sie reichen, mit einander zusammenfallen werden. Dieses letztere wird bei den Beweisen durch Congruenz in I, 4. 8. vorausgesetzt; indem z. B. in I, 4. angenommen wird: wenn man die AB auf die ΔE bringt, so dafs der Punkt A auf Δ, und die gerade AB auf die ΔE fällt; dafs alsdann auch der Endpunkt B der AB, diese seye so grofs sie wolle, auf der nach E zu unbegränzten ΔE liegen werde; denn auf dieser Voraussetzung beruht die dortige Behauptung, dafs, wenn die AB und ΔE begränzt und einander gleich sind, auch der Punkt B auf E fallen werde. Und ebenso verhält es sich mit dem Fallen der $A\Gamma$ auf die ΔZ.

Wenn zwei gerade Linien einen gemeinschaftlichen Abschnitt haben könnten: so würden auch nicht alle rechte Winkel einander gleich seyn; und es könnten auf Einer geraden Linie in einem Punkt derselben mehr als ein Perpendikel stehen. Gesetzt es seyen zwei gerade Linien ABC, ABD (*Fig.* 2.), welche den Abschnitt AB mit einander gemein haben, und es sey auf der ABC ein Perpendikel BE errichtet; so wird sich nach I, 11. auch auf die ABD ein Perpendikel errichten lassen, welches von jenem BE verschieden seyn wird. Denn gesetzt EB wäre auf beiden ABC und ABD senkrecht: so wäre jeder der Winkel EBC, EBD dem Winkel EBA gleich (I, Def. 10.); und mithin die Winkel EBC, EBD selbst einander gleich (Ax. 1.); das ist, ein Theil dem Ganzen; welches nicht möglich ist (Ax. 9.). Also kann die EB nicht auch auf der ABD senkrecht seyn: Man errichte also (I, 11.) auf der ABD in B ein Perpendikel, welches von BE verschieden seyn wird; wie BF: so sind die Winkel ABF, FBD einander gleich (I, Def. 10.), und jeder derselben ein rechter. Weil aber die EB auf der ABC senkrecht ist; so sind auch die Winkel ABE, EBC gleich, und jeder derselben ein rechter. Es sind also die Winkel ABE, ABF beide rechte, und einander ungleich. Also wenn zwei gerade Linien einen gemeinsch. Abschnitt haben könnten; so könnten auf Einer geraden Linie in einem Punkte mehr als zwei Perpendikel stehen, und es wären nicht alle rechte Winkel einander gleich. — Man vergl. hiemit den Beweis, den Rob. Simson in seinem Zusatze zu I, 11. von dem Satze gibt, dafs zwei gerade Linien keinen gemeinsch. Abschnitt haben können; und man wird finden, dafs derselbe ungenügend sey.

Weiter hätte die Annahme, dafs zwei gerade Linien einen gemeinsch. Abschnitt haben könnten, Einfluss auf die Sätze: I, 13.; denn es wären die zwei Nebenwinkel, welche irgend eine im Punkte B aufstehende BG (s. die vorige Fig. 2.) einmal mit der ABC, und wiederum mit der ABD macht, beiderseits zweien rechten gleich; aber rechten von ungleicher Gröfse: — auf I, 14. wo der Beweis geradezu entkräftet würde: — auf I, 15. wo ein Winkel zwei Wechselwinkel haben könnte, einen, der ihm gleich, und einen, der ihm

ungleich wäre: — auf I, 29. 30. 31. wo ein Abschnitt einer geraden Linie mit einer andern parallel, ein anderer mit ihr zusammen laufen könnte; oder durch Einen Punkt mehr als Eine Parallele mit einer geraden Linie gehen könnte: — auf I, 32. wo durch Verlängerung einer Seite eines Dreiecks bei Einem Winkelpunkte zwei Aufsenwinkel entstehen könnten, von welchen, wenn einer den zwei innern Gegenwinkeln zusammen gleich wäre, der andere ihnen ungleich seyn müfste; u. a.

Umgekehrt hingegen: Vorausgesetzt, dafs zwei gerade Linien keinen Abschnitt mit einander gemeinschaftlich haben können; so lassen sich auch die Sätze beweisen: Auf einer geraden Linie in einem Punkte derselben kann nur Ein Perpendikel stehen; und alle rechte Winkel sind einander gleich; und jede zwei Nebenwinkel zusammen sind so grofs als jede zwei andere zusammen; und alle Scheitelwinkel sind einander gleich; und der Satz I, 14. gilt; und mit Zuziehung des 11ten Axioms läfst sich der Satz I, 29. erweisen; und dafs durch Einen Punkt mit einer gerade Linie sich nur Eine Parallele ziehen lasse; und dafs der Aufsenwinkel eines Dreiecks immer den zwei innern Gegenwinkeln gleich sey, u. s. w.

b) Dafs von einem Punkt zum andern nur Eine gerade Linie gehen könne, wird beim Beweis des 4ten Satzes gebraucht, und dort darauf zurückgeführt, dafs zwei gerade Linien keinen Raum einschliefsen; welches bei Euklid das 12te Axiom ist. «Wenn,» heifst es in jenem Beweise, «nachdem der Punkt B auf E, und der Punkt Γ auf Z gepafst hat, (gefallen ist, ihn gedeckt hat), die Grundlinie $B\Gamma$ nicht auf die EZ pafste (sie nicht deckte): so würden zwei gerade Linien einen Raum einschliefsen; welches nicht möglich ist.» Dieser Schlufs hat Statt, man mag sich die $B\Gamma$ und die EZ in ihrer ganzen Ausdehnung zwischen E und Z aufserhalb einander liegend gedenken, oder, wie der arabische Uebersetzer Nasireddin bemerkt und in einer Figur darstellt, dieselbe einem Theile nach zusammenfallend und einem andern Theile nach aufser einander liegend vorstellen: in beiden Fällen nämlich würden sie einen Raum einschliefsen. (S. Fig. 3.)

Wenn zwei gerade Linien einen Raum einschliefsen könnten: so wäre die einfachste geradlinigte Figur nicht ein Dreieck, sondern ein Zweieck; die Construction in I, 1. könnte statt eines gleichseitigen Dreiecks ein Zweieck geben, wovon eine Seite doppelt so grofs wäre als die andere; zwei Dreiecke, wie in I, 4., welche zwei Seiten zweien Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, könnten ungleiche Grundlinien und die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich haben; in der Construction zum Beweis von I, 16. könnte die gerade Linie BE verlängert der Verlängerung $\Gamma\Delta$ von $B\Gamma$ begegnen, und etwa der Punkt Z selber auf diese Verlängerung zu liegen kommen; somit würde der Fall herauskommen, dafs ein Aufsenwinkel $A\Gamma\Delta$ seinem innern Gegenwinkel bei A gleich wäre; also zwei gerade Linien, mit denen eine dritte, welche sie trifft, gleiche Wechselswinkel macht, an einer Seite zusammenträfen, und hiemit der 27. Satz umgestofsen würde. Oder, wenn auch der Punkt Z aufserhalb der $\Gamma\Delta$ liegt; so könnte ein Zweifel seyn, ob nicht die gerade Linie von Z nach Γ, ehe sie den Punkt Γ trifft, die $\Gamma\Delta$ vorher in einem andern Punkte träfe, und sich von da erst an der andern Seite wieder gegen den Punkt Γ hinzöge; so dafs nicht der Winkel $Z\Gamma E$ ein Theil des Winkels $A\Gamma E$ wäre, sondern um-

gekehrt dieser von jenem. — Beim Beweis des Satzes 22. könnte die Verlängerung von BA, statt der $A\Gamma$ zwischen A und Γ zu begegnen, auf einen der Punkte A oder Γ stofsen, oder der BA zwischen B und A begegnen, so dafs man statt des Dreiecks ABE wiederum ein Zweieck bekäme u. s. w.

Umgekehrt hingegen: vorausgesetzt, dafs von einem Punkte zum andern nur Eine gerade Linie möglich ist: so werden, wenn aufserhalb einer begränzten geraden Linie irgend ein Punkt angenommen wird, der nicht auf ihrer Verlängerung liegt, die zwei von diesem Punkt aus an die Endpunkte der ersten gezogenen geraden Linien mit ihr ein Dreieck einschliefsen; so wird durch die Construction in I, 1. ein gleichseitiges Dreieck und kein Zweieck erhalten, indem die zwei gerade Linien $A\Gamma$, ΓB nicht in gerader Richtung an einander liegen, und mit der AB einen Raum einschliefsen können; und der Beweis von I, 4. ist gültig, indem dort auch die Grundlinie $B\Gamma$ die Grundlinie EZ decken wird; und im Beweis von I, 16. gilt die Folgerung: der Winkel $Z\Gamma E$ ist kleiner als der Winkel $A\Gamma A$; und im Beweis von I, 21. mufs die verlängerte BA der $A\Gamma$ zwischen A und Γ begegnen u. s. w.

c) Beide Axiome: dafs zwei gerade Linien keinen gemeinsch. Abschnitt haben können, und dafs sie keinen Raum einschliefsen können, sind in dem Ausdruck begriffen: zwei gerade Linien können nicht mehr als einen Punkt mit einander gemein haben. — So begreift auch der Satz: zwei gerade Linien können sich nicht in mehr als einem Punkt schneiden, zweierlei in sich: 1) dafs sie einander nicht zweimal schneiden können, so dafs sie zwischen den zwei Durchschnitten einen Raum einschliefsen; 2) dafs sie da, wo sie sich schneiden, keinen ausgedehnten Theil mit einander gemein haben, nicht die kleinste Strecke weit gemeinschaftlich mit einander fortlaufen können.

Das Axiom: dafs zwei gerade Linien nicht mehr als einen Punkt gemein haben, nicht in mehr als einem Punkte zusammentreffen können, wird gebraucht beim ersten Beweise von III, 9. (dessen Aechtheit übrigens zweifelhaft ist) in den Worten: *Και εδεν ἑτερον κοινον εχεσιν αἱ HK, ΘΛ ευθειαι, η το Δ σημειον*; und gewifsermafsen auch im ersten Beweise von III, 10. (bei welchem aber derselbe Fall ist) in den Worten: *Και κατ' εδεν συμβαλλεσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ ευθειαι αλληλαις η κατα το Ο.*

d) Die genannten zwei Axiome lassen sich als ein Zusatz und weitere Bestimmung des ersten und zweiten Postulats ansehen; nämlich, Post. 1.: Zwischen jeden zwei Punkten läfst sich eine gerade Linie ziehen, aber auch nur Eine; Post. 2. Jede begränzte gerade Linie läfst sich geradefort verlängern, aber über einen Endpunkt hinaus nur auf einerlei Weise; oder es läfst sich ihr eine andere gerade Linie in gleicher Richtung ansetzen oder hinausziehen (wie der Ausdruck in I, 2. gebraucht ist: *Εκβεβληθωσαν επ' ευθειας ταις ΔΑ, ΔΒ ευθειαι αἱ ΑΕ, ΒΖ*); aber auch nur Eine.

Eine ähnliche Bestimmung zum dritten Postulat wäre: Aus jedem gegebenen Mittelpunkt mit jedem gegebenen Abstand läfst sich ein Kreis beschreiben, aber auch nur Einer: welches sich vermittelst Def. 15. und Ax. 9. darthun läfst. Denn gesetzt es lassen sich mit dem Mittelpunkt A und dem Abstand AB zwei verschiedene

Kreise (*Fig. 4.*) BCD und BEF beschreiben: so liefsen sich gerade Linien vom Mittelpunkt A aus ziehen, die den beiden Peripherien in verschiedenen Punkten C und E begegneten; und dann wäre, wenn man auch die gerade AB zieht, in dem einen Kreis die AC der AB gleich, in dem andern die AE der AB gleich: mithin (Ax. 1.) die AC der AE gleich, ein Theil dem Ganzen; welches unmöglich ist (Ax. 9.).

e) Das 10te Axiom läfst sich erweisen; s. zu I, 11. — Das 11te betreffend, s. vor I, 29.

Die geometrischen Axiome kommen in mehreren Handschriften und Ausgaben der Elemente, wie auch bei Proclus, als Postulate vor: nämlich das 10te Ax. als 4tes Postulat, das 11te als 5tes, und das 12te Ax. als 6tes Postulat: wobei alsdenn die Bestimmung des Begriffs dieser beiderlei Arten von Principien etwas verändert wird. S. Chrestom. geom. p. 118. ss. Wallisii Opera Math. T. II. Oxon. 1693. p. 667, sqq. Scheibel, zwei math. Abhandl. Bresl. 1807. S. 17. ff. — Camerer in Euclidis Elem. T. I. p. 23—25.

Anhang.

Von einerlei oder zweierlei Seiten einer geraden Linie; und vom Begegnen, Berühren und Schneiden einer Linie oder Figur und einer andern Linie oder Figur.

1) Jede gerade Linie in einer Ebene hat zwei Seiten. Jeder Punkt in der Ebene, der nicht auf ihr liegt, indem sie als unbegränzt gedacht wird, liegt an der einen oder an der andern Seite von ihr: und eben dieses wird man auch, wenn sie begränzt ist, sagen, wofern der aufser ihr angenommene Punkt eine solche Lage gegen sie hat, dafs sich mit Leichtigkeit beurtheilen läfst, dafs sie auch verlängert nicht auf ihn treffen werde.

In der gemeinen Sprache unterscheidet man diese zwei Seiten durch die Wörter: rechts, links; oben, unten; disseits, jenseits. Im Griechischen und Lateinischen werden die Wörter μερη, partes, gebraucht; z. B. an einerlei Seite, επι τα αυτα μερη, ad easdem partes; an der andern Seite, επι τα ἑτερα μερη, ad alteras partes: ein bequemerer Ausdruck als der Deutsche wegen des letztern Homonymie mit Seiten eines Dreiecks, einer Figur, was dort πλευρα, latus heifst. So in I, 7. «Auf einerlei gerader Linie lassen sich nicht an einerlei Seite von ihr (επι τα αυτα μερη) zwei Paare gerader Linien so und so zusammenstellen u. s. w.» — In I, 12. wo eine unbegränzte gerade Linie *AB* und ein Punkt *Γ* aufser ihr gegeben ist, heifst es in der Construction: man soll einen Punkt *Δ* an der andern Seite der *AB* nehmen. — In I, 14. ist von zwei geraden Linien die Rede, die an einer geraden Linie und an einem Punkte derselben, aber an verschiedenen Seiten von ihr (oder nicht an einerlei Seite) liegen (μη επι τα αυτα μερη κειμεναι). — In I, 39. 40. ist von Dreiecken die Rede, die auf einerlei geraden Linie als Grundlinie, und an einerlei Seite derselben liegen; oder die auf Stücken Einer geraden Linie als ihren Grundlinien, und an einerlei Seite derselben liegen. — In III, 23. von Kreisabschnitten, die auf der nämlichen geraden Linie an einerlei Seite von ihr sollen stehen können oder nicht. — In XI, 13. ist von den Seiten einer Ebene die Rede: dafs auf einerlei Ebene in einerlei Punkt und an

einerlei Seite von ihr nicht mehr als Eine senkrechte sich errichten lasse. — In I, 28. 29. ist von zwei Winkeln die Rede, welche an einerlei Seite der geraden Linie, die mit zwei andern diese Winkel einschliefst, liegen.

In einer etwas andern Beziehung wird der Ausdruck in folgendem Fall gebraucht. Wenn zwei gerade Linien neben einander fortlaufen, so dafs, vorerst wenigstens, keine die andere trifft oder schneidet; es mögen nun beide begränzt seyn, oder eine oder beide als noch weiter, so weit es nöthig ist, fortzuziehende gedacht werden: so läfst sich auch von zwei Seiten bei denselben reden, in Beziehung auf die Stellen, wo sie, bestimmt oder einstweilen, sich endigen. Man kann beide nach der einen und nach der andern Seite hin verlängern, und sie können alsdann entweder an der einen Seite verlängert zusammentreffen, von welchem Fall in Ax. 11., und im Beweis von I, 27. (επι τα ΒΔ μερη, επι τα ΑΓ) die Rede ist; oder an keiner von beiden Seiten verlängert zusammentreffen (επι μηδετερα μερη), wovon in Def. 35. und wiederum I, 27. Bew.: nach beiden Seiten verlängert zusammentreffen können sie niemals, weil sonst zwei gerade Linien einen Raum einschliefsen würden. — In I, 33. werden die Endpunkte zweier begränzten Parallelen an einerlei Seite (επι τα αυτα μερη), an der einen sowohl als an der andern, durch gerade Linien verbunden.

So wird manchmal auch von einer einzelnen geraden Linie gesagt, man verlängere dieselbe z. B. nach der einen oder nach der andern Seite; oder sie sey an beiden Seiten begränzt (so heifst in Def. 17. der Durchmesser eines Kreises eine durch den Mittelpunkt gezogene und an beiden Seiten, εφ' εκατερα τα μερη, von der Peripherie begränzte gerade Linie), oder an beiden unbegränzt, oder an der einen begränzt, an der andern unbegränzt (für welchen letztern Fall Euklid in I, 22. den Ausdruck hat: ευθεια η ΔΕ, πεπερασμενη μεν κατα το Δ, απειρος δε κατα το Ε): Wobei man auf die zwei entgegengesetzten Gegenden sieht, nach welchen eine gerade Linie als sich erstreckend gedacht werden kann; nämlich, wie man zu reden pflegt, nach der einen vorwärts, nach der andern rückwärts; oder nach der einen hinauf, nach der andern herunter; oder nach der einen rechts, nach der andern links; nach der einen herbei, nach der andern hinweg, u. dgl.

2) Wenn eine gerade oder andere Linie durch eine gerade Linie in einer Ebene hindurchgeht oder sie schneidet: so liegt sie mit ihrem einen Theile, der bis zum Durchschnitt geht, an der einen, und mit dem andern Theile, der im Durchschnitt an den ersten gränzt, an der andern Seite derselben; so dafs sie im Durchschnitt ihren Uebergang von der einen Seite zu der andern macht: Wenn aber eine begränzte gerade oder andere Linie gegen eine gerade Linie in einer Ebene so liegt, dafs diese letztere weder selbst schon, noch auch verlängert, so weit man will, durch sie hindurch geht: so liegt die begränzte ganz an Einer Seite der andern.

Ebenso wenn eine unbegränzte gerade Linie durch eine in der nämlichen Ebene mit ihr liegende Figur hindurchgeht: so theilt sie die Figur in zwei Theile, wovon der eine an der einen, der andere an der andern Seite der geraden Linie liegt; Wenn aber die unbegränzte gerade Linie, verlängert so weit man will, durch die Figur nicht hindurchgeht oder sie nicht schneidet; so liegt die ganze Figur an der einen Seite der geraden Linie.

Wenn zwei Punkte an einerlei Seite einer geraden Linie in einer Ebene liegen; so liegt auch die dieselbe verbindende und in den genannten Punkten begränzte gerade Linie ganz an der nämlichen Seite derselben: Wenn aber zwei Punkte an verschiedenen Seiten einer unbegränzten geraden Linie liegen: so schneidet die diese Punkte verbindende gerade Linie die unbegränzte; sie mufs nämlich, um von der einen Seite derselben an die andere zu kommen, irgendwo durch sie selber hindurchgehen: und alsdann liegt von den beiden Theilen, in welchen sie im Durchschnittspunkt getheilt wird, der eine an der einen, der andere an der andern Seite derselben.

Wenn eine gerade Linie, die eine andere in einer Ebene trifft, berührt, auf sie stöfst, über den Punkt der Berührung hinaus verlängert wird; so liegt diese Verlängerung, und jeder Punkt, den man auf ihr nehmen mag, an der andern Seite der andern, als an welcher die anfängliche berührende liegt.

3) Wenn eine unbegränzte gerade Linie eine geschlossene Figur in einer Ebene einmal an einer Stelle schneidet: so schneidet sie dieselbe noch einmal an einer andern Stelle. Man kann sich nämlich gedenken, dafs sie an der ersten Stelle von aufsen her in sie hineinkomme; und da sie in ihrer Richtung ohne Gränze fortlauft, oder verlängert werden kann, so weit man will; die Figur aber geschlossen und durch ihren Umfang begränzt ist: so kann sie nicht innerhalb derselben bleiben; sondern mufs wieder an irgend einer Stelle des die Figur begränzenden Umfangs von innen her wieder aus ihr hinauskommen; das ist, sie mufs sie zum zweitenmal schneiden.

Wenn eine begränzte gerade Linie innerhalb einer ebenen Figur liegt; so mufs sie an beiden Endpunkten verlängert dem Umfang der Figur begegnen, ihn treffen, und verlängert schneiden.

Daher auch: Wenn eine ebene Figur zum Theil an der einen, zum Theil an der andern Seite einer unbegränzten geraden Linie liegt; so schneidet ihr Umfang die gerade Linie wenigstens an zwei Stellen.

Und wenn eine ebene Figur durch zwei nicht an einerlei Seite einer in derselben Ebene befindlichen geraden Linie liegende Punkte geht; so schneiden der Umfang der Figur und die gerade Linie einander wenigstens in zwei Punkten.

4) Anwendung auf Dreiecke:

Wenn eine Seite eines Dreiecks verlängert wird: so fällt die Verlängerung aufserhalb des Dreiecks. Sie fällt nämlich (nach 2) an die andere Seite (ad alteras partes) der an dem Endpunkt, an welchem die Verlängerung geschieht, anliegenden Seite (lateris) des Dreiecks, als an welcher sie selber liegt; das ist, aufserhalb des Dreiecks.

Wenn aus einem auf einer Seite (in latere) eines Dreiecks angenommenen Punkte eine gerade Linie innerhalb des Dreiecks gezogen wird: so trifft sie, gehörig weit fortgezogen, entweder auf den gegenüberliegenden Winkelpunkt des Dreiecks, oder auf eine der übrigen Seiten des Dreiecks, und zwar zwischen ihren beiden Endpunkten. Denn sie mufs (nach 3) dem Umfang des Dreiecks noch einmal begegnen: sie kann aber (nach c oben, oder nach Axiom 12.) der ersten Seite nicht mehr, weder in einem ihrer Endpunkte, noch zwischen diesen, begegnen: folglich mufs sie entweder auf den gegenüberliegenden Winkelpunkt treffen, oder einer der übrigen Seiten, und zwar zwischen ihren Endpunkten begegnen.

Wenn aus dem Winkelpunkt eines Dreiecks eine gerade Linie innerhalb desselben gezogen wird, so trifft dieselbe gehörig weit fortgezogen auf die gegenüberliegende Seite in einem Punkt zwischen ihren beiden Endpunkten. Denn sie mufs dem Umfang des Dreiecks noch einmal begegnen: sie kann aber keiner der beiden um den genannten Winkelpunkt liegenden Seiten, weder in einem ihrer Endpunkte noch sonsten, begegnen: weil sonst zwei gerade Linien einen Raum einschliefsen würden. Folglich mufs sie der gegenüberliegenden Seite, und zwar zwischen ihren Endpunkten, begegnen. — Hievon wird im Beweise von I, 21. Gebrauch gemacht.

Eine ganz innerhalb eines Dreiecks liegende begränzte gerade Linie auf beiden Seiten verlängert, begegnet dem Umfang des Dreiecks in zwei Punkten; und zwar begegnet sie entweder zweien Seiten, jeder zwischen ihren Endpunkten; oder sie trifft auf einen Winkelpunkt und auf einen Punkt der ihm gegenüberliegenden Seite, welcher zwischen ihren Endpunkten liegt.

Eine gerade Linie, welche zwei Punkte verbindet, deren einer innerhalb, der andere aufserhalb eines Dreiecks liegt, schneidet entweder eine Seite des Dreiecks, oder sie geht durch einen seiner Winkelpunkte.

5) Anwendung auf Kreise:

Eine gerade Linie, die einen Punkt innerhalb und einen Punkt aufserhalb eines Kreises, die in einer Ebene mit ihm liegen, mit einander verbindet, schneidet die Peripherie des Kreises. Namentlich eine vom Mittelpunkt eines Kreises an einen Punkt ausserhalb desselben gezogene gerade Linie schneidet dessen Peripherie.

Dafs eine gerade Linie, welche zwei Punkte seiner Peripherie verbindet, ganz innerhalb des Kreises falle, wird in III, 2. bewiesen. Woraus folgt: dafs eine gerade Linie keinen Theil von einiger Ausdehnung mit der Kreisperipherie gemein haben, nicht dem kleinsten Theile nach mit ihr zusammenfallen kann. Daher eine gerade Linie innerhalb des Kreises, die auf einen Punkt seiner Peripherie trifft, über diesen hinaus verlängert nicht mit der Peripherie fortlaufen kann, also aufserhalb des Kreises fallen, ihn schneiden mufs. Ferner, wenn eine gerade Linie eine Kreisperipherie an einer Stelle schneidet; so schneidet sie sie an dieser Stelle nur in Einem Punkte.

Eine von einem Punkte der Peripherie eines Kreises innerhalb desselben gezogene gerade Linie begegnet der Peripherie gehörig fortgezogen noch einmal. Und eine innerhalb eines Kreises liegende begränzte gerade Linie begegnet über jeden ihrer beiden Endpunkte hinaus verlängert der Peripherie. Namentlich jede vom Mittelpunkt eines Kreises aus gehörig weit fortgezogene gerade Linie begegnet der Peripherie, und schneidet weiter fortgezogen dieselbe.

Umgekehrt: Wenn aus dem Endpunkte einer nach der andern Seite hin unbegränzten geraden Linie als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben wird: so schneidet seine Peripherie die unbegränzte gerade Linie. Dieses wird bei dem Beweise von I, 2. gebraucht.

Wenn ein Kreis zum Theil an der einen, zum Theil an der andern Seite einer unbegränzten geraden Linie liegt: so mufs seine Peripherie die unbegränzte gerade schneiden. Daher auch: Wenn durch zwei Punkte, die an verschiedenen Seiten einer unbegränzten geraden Linie liegen, eine Kreisperipherie geht: so müfsen diese und die gerade einander schneiden.

Wenn ein Kreis ganz an Einer Seite einer geraden Linie liegt, welche jedoch denselben (oder seine Peripherie) an einer Stelle trifft: so sagt man, die gerade Linie berühre den Kreis, oder der Kreis berühre die gerade Linie (vgl. III, Def. 2.). Dafs diese Berührung nur in Einem Punkte geschehen könne, wird in III, 16. Zus. erwiesen.

Dafs ein Kreis und eine gerade Linie einander nicht in mehr als zwei Punkten schneiden können, wird in den Zusätzen zu I, 19. erwiesen (s. nachher §. 201, d.).

Wenn der Mittelpunkt eines Kreises auf einer geraden Linie in derselben Ebene liegt: so liegt der Kreis, wie auch seine Peripherie, zum Theil an der einen, zum Theil an der andern Seite der geraden Linie, und schneidet dieselbe, wenn sie unbegränzt oder gehörig lang ist oder gehörig verlängert wird, oder wird von ihr geschnitten. — Denn läge der Kreis nicht zum Theil an der einen, zum Theil an der andern Seite der geraden Linie: so läge er ganz an Einer Seite derselben: alsdann müfste aber auch sein Mittelpunkt, als ein innerhalb des Kreises befindlicher Punkt (I, Def. 15.), an dieser Seite der geraden Linie liegen. Dieses ist aber nicht so: denn er liegt auf ihr. Folglich kann der Kreis nicht ganz auf Einer Seite der geraden Linie liegen: er liegt also zum Theil auf der einen, zum Theil auf der andern Seite. Woraus folgt, dafs er sie schneiden müfse.

Wenn eines Kreises Mittelpunkt an einer Seite einer geraden Linie liegt: so liegt der Kreis wenigstens einem Theile nach an eben derselben Seite der geraden Linie. Denn wäre dieses nicht; so läge er ganz an der andern Seite. Alsdann müfste aber auch sein Mittelpunkt, als ein innerhalb des Kreises befindlicher Punkt (I, Def. 15.) an dieser Seite liegen; welches der Vorauss. widerspricht, wonach er an der andern Seite liegt.

Wenn eines Kreises Mittelpunkt an einer, und ein Punkt seiner Peripherie an der andern Seite einer unbegränzten geraden Linie liegt: so wird er die gerade Linie zweimal schneiden. — Denn an welcher Seite sein Mittelpunkt ist, an derselben Seite ist auch ein Theil des Kreises: und an welcher Seite ein Punkt seiner Peripherie ist, an derselben ist auch ein Theil des Kreises. Also liegt der Kreis zum Theil an der einen, zum Theil an der andern Seite der geraden Linie; mithin schneidet er dieselbe, da sie unbegränzt ist; und zwar vermöge des obigen, zweimal. — Dieses wird bei der Construction in I, 12. gebraucht.

Wir können hiebei den Satz als Corollarium zu Def. 15. bemerken: Jeder Kreis hat nur einen einzigen Mittelpunkt. Denn gesetzt, es sey möglich, dafs ein Kreis zwei Mittelpunkte A und B habe (*Fig.* 5.): so ziehe man die gerade Linie AB, und verlängere sie über A und über B hinaus, bis sie der Peripherie in C und D begegne. Da nun A Mittelpunkt des Kreises ist, und von ihm aus die geraden Linien AC, AD an die Peripherie gehen; so sind diese einander gleich (Def. 15.). Mithin ist die AC gröfser als die BD; und noch vielmehr ist die BC gröfser als die BD. Da aber auch B Mittelpunkt des Kreises ist, und von ihm aus die geraden BC, BD an die Peripherie gehen: so ist die BC der BD gleich (Def. 15.). Sie ist aber auch gröfser, nach dem Bewiesenen: welches unmöglich ist. Folglich kann nicht ein Kreis mehr als einen Mittelpunkt haben: w. z. e. w.

6) Zwei ebene Figuren (nach Def. 14., d. i. eingeschlossene Räume), die in einer Ebene liegen, liegen entweder ganz aufserhalb

einander, oder die eine ganz innerhalb der andern, oder jede von beiden zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb der andern. Wenn die eine ganz innerhalb der andern liegt: so ist klar, dafs ein Theil der letztern aufserhalb, und ein Theil innerhalb der ersteren liege, ihr Umfang aber ganz aufserhalb der ersteren liege.

Wenn die eine ganz innerhalb der andern liegt: so kann sie entweder in ihrem ganzen Umfang von der andern entfernt seyn, oder sie kann mit dieser an einer Stelle zusammenstofsen; und im letzten Falle sagt man, sie berühre sie inwendig. Ebenso, wenn sie ganz aufserhalb einander liegen, können sie doch irgendwo zusammentreffen; und man sagt alsdann, sie berühren einander dort auswendig.

Allgemeiner wird man von einer Figur sagen, sie berühre eine andere in derselben Ebene befindliche Figur an einer Stelle inwendig, wenn ihr Umfang an dieser Stelle mit der andern zusammentrifft, aber zunächst an beiden Seiten dieser Stelle innerhalb der andern Figur liegt: Und eine Figur berühre die andere an einer Stelle auswendig, wenn ihr Umfang an dieser Stelle mit der andern zusammentrifft, aber zunächst an beiden Seiten dieser Stelle aufserhalb der andern Figur liegt. — Wenn aber der Umfang einer Figur mit einer andern Figur an einer Stelle zusammentrifft, aber zunächst an dieser Stelle an der einen Seite innerhalb, an der andern aufserhalb der andern Figur fällt: so sagt man, die erste Figur schneide die andere an dieser Stelle. Daher kann man auch sagen, eine Figur berühre die andere an einer Stelle, wenn sie sie an dieser Stelle trifft, aber nicht schneidet.

Wenn jede von zwei ebenen Figuren zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb der andern fällt: so müfsen sie einander schneiden. Und wenn der Umfang einer ebenen Figur zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb einer andern fällt: so schneidet sie die andere. — Denn da dieser Umfang ein Continuum ist, indem die Figur von ihm eingeschlossen ist (Def. 13. 14.): so kann derselbe in Beziehung auf die andere Figur nicht von Innen nach Aufsen kommen, ohne durch die Begränzung oder den Umfang der andern Figur hindurch zu gehen, das heifst, sie zu schneiden.

Wenn eine ebene Figur eine andere einmal schneidet: so schneidet sie sie auch noch einmal; und wenn sie sie zum drittenmal schneidet, so schneidet sie sie auch zum viertenmal. Allgemein haben die Durchschnitte einer ebenen Figur mit einer andern immer paarweise Statt. Denn jeder Durchschnitt bezeichnet einen Wechsel zwischen dem Innern und dem Aeufsern der Figur, einen Uebergang von Aufsen nach Innen, oder von Innen nach Aufsen. Man setze nun, der Umfang einer ebenen Figur schneide eine andere Figur in derselben Ebene einmal: so liegt bei der Stelle, wo dieses geschieht, einer der angränzenden Theile des Umfangs aufserhalb, der andere innerhalb der andern Figur. Dieser aufserhalb und dieser innerhalb liegende Theil aber müfsen nach der Gegend hin, wohin sie sich erstrecken, auch wieder zusammenhängen, weil der Umfang überhaupt, als bei einem eingeschlossenen Raume, stetig zusammenhängt. Dieses kann aber nicht geschehen, ohne dafs ein neuer Wechsel zwischen Innen und Aufsen Statt hat; das ist, es mufs einen zweiten Durchschnitt geben. (Es ist zwar nicht durchaus nothwendig, dafs dieser an einer andern Stelle Statt habe; er könnte wieder an der vorigen Statt haben; wenn nämlich die eine Figur einen Knoten macht.) Also wenn bei zwei geschlossenen ebenen Figuren ein Durch-

schnitt Statt hat; so muſs nothwendig auch ein zweiter Statt haben. — Und auf ähnliche Weise wird man sich vorstellen, daſs, wenn ein dritter Statt hat, auch ein vierter Statt haben müſse. Man setze, der schneidende Umfang, der einen Figur erstrecke sich beim ersten Durchschnitt von Aufsen nach Innen, also beim zweiten von Innen nach Aufsen, also beim dritten wieder von Aufsen nach Innen: so muſs der in diesem letzten Fall innen zu liegen kommende Theil mit dem beim ersten Durchschnitt aufsen liegenden Theil irgendwo zusammenhängen, weil es eine geschlossene Figur, und also ihr Umfang stetig zusammenhängend ist. Dieses kann aber nicht geschehen, ohne daſs wiederum der erstere, der innen liegende Theil mit dem zweiten, dem aufsen liegenden Theile an einander gränzen, und in einander übergehen, welches ein Hindurchgehen durch den Umfang der andern Figur erfordert, also einen neuen Durchschnitt, welches der vierte ist. — Und so, wenn fünf Durchschnitte Statt haben, wird auch der sechste Statt haben müſsen; u. s. w. Das ist: die Durchschnitte haben immer paarweise Statt.

So können z. B. zwei Dreiecke einander in 2, 4 oder 6 Punkten schneiden.

7) Anwendung auf Kreise.

Zwei Kreise in einer Ebene liegen entweder ganz aufserhalb einander, oder der eine ganz innerhalb des andern, oder ein jeder zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des andern. Wenn der eine ganz innerhalb des andern liegt; so ist klar, daſs ein Theil des letztern aufserhalb, und ein Theil innerhalb des ersteren liege, seine Peripherie aber ganz aufserhalb des ersteren liege.

Wenn der ganz $\left.\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{aufserhalb}\end{matrix}\right\}$ des andern liegende Kreis mit diesem gleichwohl irgendwo zusammenstöſst: so sagt man, er berühre ihn daselbst $\left.\begin{matrix}\text{inwendig}\\ \text{auswendig}\end{matrix}\right\}$. Allgemeiner sagt man von einem Kreis, er berühre den andern $\left.\begin{matrix}\text{inwendig}\\ \text{auswendig}\end{matrix}\right\}$ an einer gewiſsen Stelle, wenn seine Peripherie daselbst mit dem andern zusammentrifft, aber zunächst an beiden Seiten dieser Stelle $\left.\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{aufserhalb}\end{matrix}\right\}$ desselben liegt. (Vergl. III, Def. 3. Camerer p. 263. ff.)

Wenn aber die Peripherie eines Kreises mit einem andern Kreise an einer Stelle zusammentrifft, aber zunächst an dieser Stelle an der einen Seite innerhalb, an der andern aufserhalb der Figur fällt: so sagt man, der erste Kreis schneide den andern, oder die beiden Kreise schneiden einander, an dieser Stelle. Daher kann man auch sagen: ein Kreis berühre den andern an einer Stelle, wenn er ihn an dieser Stelle trifft, aber nicht schneidet.

Wenn jeder von zwei Kreisen zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des andern liegt: so müſsen sie einander schneiden. Und wenn die Peripherie eines Kreises zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb eines andern liegt: so schneidet er denselben. Und wenn ein Kreis einen andern einmal schneidet: so schneidet er ihn auch noch ein andermal. — An der Stelle nämlich, wo er ihn zum erstenmal schneidet, erstreckt sich ein Theil seiner Peripherie nach Aufsen, ein anderer nach Innen in Beziehung auf den andern Kreis. Da aber diese Peripherie ein stetig Zusammenhängendes ist, indem der Kreis eine Figur, d. i. ein eingeschlossener Raum ist: so müſsen der

äufsere und der innere Theil derselben aneinander gränzen, so dafs, wo der eine sich endigt, der andere ohne Unterbrechung daran liege: also mufs der Wechsel zwischen Aufsen und Innen noch an einer Stelle Statt haben, das heifst, es mufs noch einen zweiten Durchschnitt geben. Und zwar, da das aufserhalb und das innerhalb eines Kreises liegende durch dessen Peripherie geschieden wird: so mufs jene Stelle an der Peripherie des andern Kreises seyn; so dafs mithin die Peripherien beider Kreise dort zusammentreffen.

Dafs zwei Kreise einander weder an mehr als einer Stelle, noch an einer Stelle in mehr als einem Punkte berühren; auch nicht einander an einer Stelle berühren, und an einer andern schneiden können; ferner an einer Stelle nicht in mehr als einem Punkte einander schneiden, auch nicht an mehr als zwei Stellen einander schneiden können; sind Lehrsätze, die zu erweisen sind. Dahin gehören III, 10. 13. und Camerers Anmerkungen p. 303—309.

8) Wenn die Peripherie eines Kreises durch einen innerhalb eines Kreises liegenden Punkt geht: so mufs er wenigstens zum Theil innerhalb des andern Kreises liegen. Denn läge er ganz aufserhalb des andern Kreises; so könnte er auch nur aufserhalb des andern Kreises, oder etwa an einer einzelnen Stelle auf dessen Peripherie, aber nirgends innerhalb desselben begränzt seyn, das ist, kein Punkt seiner Peripherie könnte innerhalb des andern liegen; wie doch angenommen war. Ebenso, wenn die Peripherie eines Kreises durch einen aufserhalb eines andern Kreises liegenden Punkt geht: so mufs er wenigstens zum Theil aufserhalb des andern Kreises liegen.

Wenn eines Kreises Mittelpunkt innerhalb eines andern Kreises liegt: so mufs er wenigstens zum Theil innerhalb desselben liegen. Denn läge er ganz aufserhalb des andern: so müfste auch sein Mittelpunkt, da er innerhalb seiner liegt (I, Def. 15.), aufserhalb desselben liegen. — Ebenso, wenn eines Kreises Mittelpunkt aufserhalb eines andern liegt: so mufs er wenigstens zu Theil aufserhalb des andern liegen.

9) Wenn eines Kreises Mittelpunkt auf der Peripherie eines andern liegt: so mufs er und seine Peripherie wenigstens zum Theil aufserhalb des andern liegen, und wenigstens ein Theil des andern mufs innerhalb seiner liegen. Denn 1) läge nicht ein Theil von ihm aufserhalb des andern: so läge er ganz innerhalb des andern; folglich müfste auch sein Mittelpunkt, da er innerhalb seiner liegt (I, Def. 15.), innerhalb des andern liegen: welches gegen die Voraussetzung ist, nach welcher jener Mittelpunkt auf des andern Peripherie liegt. Er mufs also wenigstens zum Theil aufserhalb des andern liegen: folglich mufs auch seine Begränzung, d. i. seine Peripherie wenigstens zum Theil aufserhalb des andern liegen. 2) Läge nicht wenigstens ein Theil des andern innerhalb seiner: so läge der ganze andere aufserhalb seiner, oder, welches einerlei ist, er läge ganz aufserhalb des andern; und mithin müfste auch sein Mittelpunkt aufserhalb des andern liegen: dieses ist aber nicht so; denn dieser Mittelpunkt liegt auf des andern Peripherie. Folglich mufs ein Theil des andern innerhalb seiner liegen.

10) Wenn jedes von zwei Kreisen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern liegt: so müfsen sie einander schneiden. — Denn weil des einen von ihnen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern liegt; so mufs er wenigstens zum Theil aufserhalb des andern fallen (nach 9.). Und da des andern Mittelpunkt auf der Peripherie des ersten liegt:

so mufs (nach dem andern Theile von 9) wenigstens ein Theil des ersten innerhalb des andern fallen. Es ist aber auch gezeigt worden, dafs ein Theil des ersten aufserhalb des andern falle. Also fällt der erste zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des zweiten. Und das ähnliche läfst sich vom zweiten zeigen. Da demnach jeder von ihnen einem Theile nach aufserhalb, und einem Theile nach innerhalb des andern fällt: so müfsen sie einander schneiden. — Oder: Es seyen die Kreise A, B; und der Mittelpunkt des Kreises, A liege auf der Peripherie des Kreises B, und der Mittelpunkt des Kreises B auf der Peripherie des Kreises A: So wird der Kreis A zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des Kreises B fallen. Denn wäre dieses nicht: so fiele er entweder ganz aufserhalb oder ganz innerhalb desselben; und im ersten Fall würde auch sein Mittelpunkt aufserhalb, im andern Fall aber innerhalb des Kreises B fallen: welches der Voraussetzung widerspricht, dafs sein Mittelpunkt auf der Peripherie des Kreises B liege. Folglich fällt der Kreis A zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des Kreises B. Und ebenso läfst sich zeigen, dafs der Kreis B zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des Kreises A falle. Folglich schneiden die beiden Kreise einander. — Oder: Da der Mittelpunkt des Kreises A in der Peripherie des Kreises B liegt: so mufs die Peripherie des Kreises A zum Theil aufserhalb des Kreises B fallen: denn fiele sie ganz innerhalb desselben, so müfste auch der Mittelpunkt des Kreises A innerhalb des Kreises B liegen; welches nicht ist; denn er liegt auf seiner Peripherie. Ferner da die Peripherie des Kreises A durch den Mittelpunkt des Kreises B geht: so mufs sie zum Theil innerhalb dessen liegen: Denn läge sie ganz aufserhalb, so würde auch derjenige Punkt derselben, welcher Mittelpunkt des Kreises B ist, aufserhalb dieses Kreises liegen; welches unmöglich ist: denn eines Kreises Mittelpunkt liegt innerhalb desselben (I, Def. 15.). Demnach liegt die Peripherie des Kreises A theils aufserhalb, theils innerhalb des Kreises B: mithin schneidet der Kreis A den Kreis B. — Dieser Satz wird im Beweise von I, 1. gebraucht. — Allgemeiner: Wenn ein Kreis seinen Mittelpunkt entweder aufserhalb, oder auf der Peripherie, eines andern Kreises, und einen Punkt seiner Peripherie innerhalb des andern Kreises hat: so mufs er denselben schneiden.

So viel zu den Axiomen.

Sätze.

Προτασεις, Propositiones, Sätze tragen theils Behauptungen vor, die zu beweisen, theils verlangte Dinge (quaesita), die zu bewerkstelligen sind: daher sie gewöhnlich auch in den Ausgaben der Elemente, so wie bei Proclus, durch die beigefügten Benennungen, Theoreme und Probleme (Lehrsätze und Aufgaben), von einander unterschieden werden. Aus Proclus B. II. K. 8. läfst sich schliefsen, dafs Euklid blofs die Aufschrift *Προτασις* gesetzt habe, welche auch der griechische Text von Gregory und die Uebersetzung von Campanus haben.

Die Theoreme (Lehrsätze) tragen Eigenschaften der Subjecte vor, welche ihnen in Folge gewifser entweder in entwickelten Ausdrücken ausgesprochener oder in einem vorher erklärten Ausdruck eingewickelter Bedingungen zukommen. Die Probleme (Aufgaben) verlangen, dafs man aus gewifsen gegebenen Dingen andere zu Stande bringen, an gewifsen gegebenen Gröfsen bestimmte Operationen bewerkstelligen soll.

Die Sätze werden gröfstentheils so abgehandelt, dafs dabei folgende sechs Theile vorkommen:

1) *Προτασις*, propositio, eine allgemeine Darstellung der Bedingungen und Folgen, oder der gegebenen und gesuchten Stücke;

2) *Εκθεσις*, expositio, Darlegung der Bedingungen oder der gegebenen Stücke in Beziehung auf eine besondere Figur, welche das, was etwa in dem allgemeinen Ausdrucke derselben noch dunkel seyn möchte, verdeutlicht;

3) *Διορισμος*, Determinatio, Bestimmung; eine Aussage der Folgen oder des Gesuchten, in Beziehung auf die nämliche Figur;

4) *Κατασκευη*, *καταγραφη*, Constructio; Construction dessen, was in den Problemen zu bewerkstelligen verlangt wird, deren Vorschriften oder Regeln die Auflösung dieser Probleme ausmachen; oder die als Vorbereitung zu den Beweisen der Theoreme sowohl, als der Auflösung der Probleme, manchmal erforderlichen Verzeichnungen;

5) *Αποδειξις*, Demonstratio; Beweis der Richtigkeit der Theoreme, oder der Statthaftigkeit der Auflösung der Probleme;

6) *Συμπερασμα*, Conclusio; der Schluſs; und zwar sowohl der besondere, der dem vorhergehenden *διορισμος*, als der allgemeine, der der *προτασις* selber entspricht.

Αντιστροφη, Conversio, Umkehrung eines Satzes ist: Wenn seine Bedingung oder Voraussezung, und Folge oder Schluſs, mit einander verwechselt werden; so daſs letztere zur Bedingung, erstere zur Folge gemacht wird. Der erstere Satzheiſst alsdenn der directe, ursprüngliche; der letztere, dessen Converse oder der umgekehrte.

Wo der directe Satz mehrere Bedingungen oder Folgen oder beides hat: lassen sich auch mehrere Conversen desselben bilden; z. B. wenn mehrere Bedingungen und eine Folge da sind, indem man eine Bedingung nach der andern zur Folge nimmt, und die Folge des directen Satzes zu seinen übrigen Bedingungen hinzunimmt.

Das zu Beweisende wird entweder selber geradezu aus den Bedingungen der Theoreme und Auflösungen der Probleme, vermittelst der angenommenen Axiome und der bereits erwiesenen Sätze, gefolgert: oder es wird dermaſsen dargethan, daſs man zeigt, daſs aus der Annahme seines Gegentheils (contradictorischen Gegensatzes) etwas Falsches oder Ungereimtes, das nämlich einem Axiom oder einem schon erwiesenen Satz oder einer anfänglich vorausgesezten Bedingung widerspricht, folgen würde; und daſs mithin jenes Gegentheil nicht Statt haben könne. Die erstere Beweisart heiſst direct, ostensiv, modus *δεικτικος* [auch a principiis (*απο των αρχων*)]; die andere indirect, *δια της εις αδυνατον απαγωγης*, durch Hinführung aufs Unmögliche oder Ungereimte, oder schlechtweg *δι' απαγωγης*, apagogisch, ad principia factus [*επι τας αρχας*, nach Proclus. S. Chrestom. geom. p. 211.]. Letztere wird besonders häufig beim Beweise der Conversen gebraucht. Nach Proclus Bericht haben einige, die sich mit Redaction der Elemente beschäftigten, dieser Beweisart sich enthalten. Eben dasselbe affectirte Coëtsius. Joseph Scaliger verwarf sie als paralogistisch und irrig. (Vgl. Jac. Bernoulli Opp. T. I. p. 230. f. Barrow Lect. math. anni 1666. Lect. VII. p. 308. Lect. VIII. p. 335.)

Die aus einem Satze sich von selbst ergebenden, entweder an sich selbst oder um ihres Gebrauchs im Folgenden willen merkwürdigen Consequenzen werden unter dem Titel Corollaria, Folgerungen, *Πορισματα*,

ohne Beweis oder blofs mit einer kurzen Anzeige desselben, dem Hauptsatze angehängt. Solche Corollaria sind entweder blofse Anwendungen eines allgemeinen Satzes auf einen besondern Fall; oder es wird darin der Satz, hinter dem sie stehen, nur mit andern Worten ausgedrückt und unter einem andern Gesichtspunkte dargestellt; oder sie lassen sich aus diesem blofs mit Zuhülfeziehung eines Axioms oder eines sehr geläufigen Theorems ableiten.

Diese Einleitung zu den Sätzen ist von Pfleiderer, und steht lateinisch, wie sie von ihm abgefafst war, in der Chrestom. geom. p. 266 — 298. Das Folgende über die 26 ersten Sätze ist weitere Ausführung Pfleidererischer Nachlässe mit eigenen Zusätzen von dem Herausgeber.

Προτασις α, Propositio prima.

Satz I.

§. 1. Der erste Satz enthält, so wie die zwei nächstfolgenden, eine Aufgabe. Proclus wirft (S. Chrestomath. geom. p. 194.) die Frage auf: warum Euklid seine Elemente mit Aufgaben, und nicht mit Lehrsätzen anfange? Man kann hierauf antworten: Da sein erster Lehrsatz, welches der 4te Satz ist, zu seinem Beweise keinen der drei vorhergehenden Sätze erfordert: so konnte zwar Euklid in so fern allerdings mit diesem den Anfang machen. Hingegen setzen die Beweise von I, 5. u. 6. die Aufgabe des 3ten Satzes voraus, welcher wiederum die Aufgaben der zwei ersten Sätze voraussetzt. Nun beruht der Beweis des 5ten auf einer zweimaligen Anwendung des 4ten: also war es schicklich, diese beiden Sätze nicht durch Zwischeneinschiebung jener drei Aufgaben zu trennen, sondern diese Aufgaben voranzustellen.

Auf der andern Seite aber ist zu bemerken: dafs nicht nur des 4ten, sondern auch des 5ten Satzes, und somit auch des 7ten und 8ten, welche beide den 6ten nicht voraussetzen, Beweise von I, 1. 2. unabhängig sind, obgleich der dritte Satz beim Beweise des 5ten gebraucht wird, weil in der That nur derjenige Fall des 3ten dabei gebraucht wird, welcher unabhängig von I, 1. 2., blofs das dritte Postulat und die Def. 15. erfordert. Der 6te Satz aber, den Euklid im ersten Buch überhaupt nirgends mehr braucht, könnte entweder

später unmittelbar vor I, 18. mit seinem jetzigen Beweise gesetzt, oder auch dieser Beweis ganz entbehrt, und der Satz als Corollarium von I, 18. gesetzt werden, aus welchem er ohne viele Umstände sich folgern läfst (§. 187.).

Wenn man nun hienach den Anfang der Elemente mit den Sätzen I, 4.; I, 5. (bei welchem man dasjenige, was in der Construction durch den 3ten Satz geschieht, durch Post. 3. und Def. 15. bewerkstelligen müfste); I, 7. 8. machte, und darauf die Sätze I, 1—3. u. 9—12. folgen liefse; so würde dieses den Vortheil gewähren: dafs dadurch in die Augen fiele, wie die Sätze I, 4. 5. 7. 8. von I, 1. 2. unabhängig sind; und dafs der Satz I, 1. nicht nur mit seiner Anwendung in I, 2. 3., sondern auch mit den weiteren Anwendungen, die bei Auflösung der Aufgaben in I, 9. 10. 11. von ihm gemacht werden, in nähere Zusammenstellung gebracht würde.

Die angeführten Vortheile jener andern Anordnung sind jedoch nicht von solcher Bedeutung, dafs man nicht mit der Euklidischen wohl zufrieden seyn könnte, welche andererseits die Vortheile gewährt:

1) dafs in I, 5. die Construction zum Beweise, welche ohne I, 3. noch einen Kreis, der aus dem Mittelpunkt *A* mit dem Abstand *AZ* beschrieben würde und die *AE* in *H* schnitte, erfordern würde, durch die Berufung auf I, 3. abgekürtzt wird; 2) dafs der 6te Satz als eine zweite Anwendung des 4ten, und keines folgenden Satzes zu seinem Beweise bedürftig, nun als der zweitnächste auf den 4ten folgt, und der 5te und 6te, als Conversen von einander, auch neben einander stehen; auch der Anfänger an dem Beweise des 6ten als erstes Beispiel eines indirecten Beweises ein einfacheres Beispiel hat als am 7ten Satze, wo Satz und Beweis schon zusammengesetzter sind; 3) dafs Satz 8. von seiner in Satz 9. folgenden unmittelbaren Anwendung nicht durch andere verschiedenartige Sätze, welche bei jener andern Anordnung dazwischen kämen, getrennt ist.

§. 2. Auflösung der Aufgabe des ersten Satzes. Um die Auflösung einer Aufgabe zu finden, ist vor allem erforderlich, dafs man dasjenige, was dieselbe verlangt, sich deutlich vorstelle, wenn etwas zusammengesetztes daran ist, dasselbe entwickle, seine Theile von einander unterscheide, sie auseinander lese, so dafs man z. B. diejenige, welche durch die übrigen bestimmt werden, und, wenn man diese hat, sich von selbst ergeben, auf die Seite stelle, und diejenige, wel-

che die andern bestimmen, und auf die es hauptsächlich ankommt, besonders betrachte; sodenn sehe, worauf es bei diesen wiederum ankomme, und, indem man diese lezteren als neue Quaesita oder Bedingungen ansieht, mit diesen ebenso wie mit den ersten verfahre; und so fortfahre, bis man endlich auf ein Quaesitum oder etliche Quaesita kommt, deren Bewerkstelligung vermöge schon bekannter Möglichkeiten sich von selbst ohne weiters ergibt.

Um diese Operationen vorzunehmen, ist dienlich, dafs man dasjenige, was verlangt wird, sich nicht nur so, wie wenn es schon gemacht wäre, in Gedanken vorstelle, sondern es auch wirklich vorzeichne, in einer Figur darstelle: wohin die bei den Mathematikern übliche Formel: Puta factum, gehört.

Die Umsetzung der ursprünglichen Data und Quaesita in andere gibt eine Reduction der anfänglichen Aufgabe in eine neue, indem man die neuen Data und Quaesita ebenfalls in Form einer Aufgabe zusammenstellt und mit Worten ausdrückt; welches also eine solche Aufgabe seyn wird, deren Auflösung die Auflösung der anfänglichen zur Folge hat. Es kann seyn, dafs man mit einer Aufgabe mehrere solche Reductionen vorzunehmen hat, ehe man auf etwas kommt, das ohne weitere Reduction für sich selbst zu bewerkstelligen ist.

§. 3. Als eine der ersten Arten von Reduction kann Statt haben, dafs, wenn die Aufgabe einen zusammengesetzten Begriff enthält, dieser entwickelt werde; dahin gehört, dafs man statt eines Definitums die Definition setze. So hier: (*Fig.* 6.) Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie AB ein gleichseitiges Dreieck errichten, heifst, ein solches Dreieck errichten, dessen drei Seiten, davon die AB eine sey, einander gleich seyen. Die Bestimmung: auf der begränzten, ist nicht ohne Bedeutung: Man könnte eine unbegränzte AB geben, das heifst, deren Endpunkte nicht bezeichnet wären, sondern die nach beiden Seiten sich so weit erstreckend gedacht würde, als man wollte; und verlangen, man soll auf ihr, der unbegränzten AB, ein gleichseitiges Dreieck errichten; das hiefse wohl: auf irgend einem Stück von ihr eines errichten; oder ein solches, das eine seiner Seiten längs der unbegränzten AB liegen habe. Zum Unterschied hievon wird gesagt, die AB soll begränzt seyn, sie soll Anfang und Ende haben in A u. in B, und

auf der begränzten AB, auf der ganzen und bloſsen AB, nicht nur auf einem Stücke von ihr, auch nicht auf der durch Verlängerung vergröſserten AB, soll das gleichseitige Dreieck errichtet werden; die AB selber soll also eine seiner Seiten werden; ihre Endpunkte A und B sollen also Winkelpunkte des Dreieckes werden.

§. 4. Puta factum. Man setze, es sey ACB das zu errichtende Dreieck: es sollen also seine drei Seiten AB, BC, CA alle einander gleich seyn. Das Gleichseyn dreier Gröſsen unter einander schlieſst drei Gleichheiten in sich: nämlich daſs die erste der zweiten, daſs sie auch der dritten, und wiederum die zweite der dritten gleich sey. Diese drei Bedingungen reduciren sich aber auf zwei vermöge des Ax. 1. Denn wenn die erste der zweiten, und auch der dritten gleich ist: so folgt von selber, daſs auch die zweite und dritte einander gleich sind. Wenn jede der beiden CA, CB der AB gleich ist; so sind auch die CA, CB einander gleich. Die Aufgabe reducirt sich also darauf: Auf der AB ein Dreieck zu beschreiben, dessen zwei Seiten CA, CB, jede der AB gleich seyen.

§. 5. Gesetzt, man hätte den Punkt C: so wären nur noch von C nach A und B gerade Linien zu ziehen; welches keine Schwierigkeit mehr hat, weil man von jedem Punkt nach jedem eine gerade Linie ziehen kann, vermöge Post. 1. Also kommt es darauf auf, den Punkt C zu finden; das heiſst: die Aufgabe reducirt sich auf diese: Es ist eine gerade Linie AB gegeben: man soll auſserhalb derselben den Punkt C so finden, daſs jede der zwei geraden Linien, die sich von C nach A und B ziehen lassen, der AB gleich sey.

§. 6. Unter diesen gehen die AC und AB von einem Punkte A aus; die BC und BA von einem Punkte B aus. Nun sind (nach Def. 15.) jede zwei von einem Punkte ausgehende gerade Linien einander gleich, wenn jener Punkt Mittelpunkt eines Kreises ist, und jene Linien vom Mittelpunkt aus an dessen Peripherie gehen. Also wenn A der Mittelpunkt eines Kreises ist, und die Punkte B, C auf seiner Peripherie sind: so ist die AC der AB gleich. Man beschreibe also den Kreis aus dem Mittelpunkte A mit der Weite AB. (*Fig.* 7.) Da nun zwar, man mag unter den unzähligen Punkten der Peripherie einen C nehmen, wo man will, die AC der AB gleich wird; aber ferner auch die CB der BA gleich werden soll: so kommt es darauf an, unter jenen un-

zähligen Punkten denjenigen zu finden, der die CB der BA gleich mache; oder die Aufgabe reducirt sich auf diese: Es ist ein Kreis gegeben, aus dessen Mittelpunkt A an seine Peripherie die gerade Linie AB geht: man soll auf seiner Peripherie den Punkt C so finden, dafs die gerade BC der BA gleich werde.

§. 7. Dieses wird aber wiederum erhalten werden, wenn A und C auf die Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt B ist; das heifst, wenn der Punkt C, der auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegen soll, zugleich auf der Peripherie desjenigen Kreises liegt, der aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA beschrieben wird. Es kommt also nunmehr darauf an, einen gemeinschaftlichen Punkt der Peripherien der zwei genannten Kreise zu finden; oder die ursprüngliche Aufgabe reducirt sich darauf: Es ist eine gerade Linie gegeben; man soll einen gemeinschaftlichen Punkt der Peripherien zweier Kreise nehmen, deren einer aus dem Mittelpunkt A und der Weite AB, der andere aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA beschrieben wird.

§. 8. Einen solchen gemeinschaftlichen Punkt aber werden die zwei Kreise haben, wenn sie sich schneiden, nämlich eben an der Stelle, wo sie sich schneiden. Nun schneiden zwei Kreise einander, wenn die Peripherie des einen zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des andern fällt. Dieses ist aber hier der Fall: denn einmal, da der zweite Kreis seinen Mittelpunkt in B auf der Peripherie des ersten hat, so mufs seine Peripherie nothwendig zum Theil aufserhalb des ersten fallen: denn wenn sie ganz innerhalb fiele, so fiele der ganze zweite Kreis innerhalb des ersten, während sein Mittelpunkt nicht innerhalb desselben, sondern auf der Peripherie des ersten Kreises liegt; es wäre also der zweite Kreis ein solcher, dessen Mittelpunkt nicht innerhalb seiner läge; welches nicht möglich ist: denn der Mittelpunkt eines Kreises ist ein Punkt innerhalb seiner (nach Def. 15.). Also mufs die Peripherie des zweiten Kreises zum Theil aufserhalb des ersten fallen. Sie fällt aber auch zum Theil innerhalb desselben, weil sie durch dessen Mittelpunkt A, einen innerhalb dessen liegenden Punkt, geht. Da nun also die Peripherie des zweiten Kreises theils aufserhalb, theils innerhalb des ersten fällt: so schneidet er den ersten, und hat also mit ihm da, wo er ihn schneidet, einen Punkt gemein-

schaftlich; welcher sich von selber ergeben muſs, so wie die Kreise beschrieben werden.

§. 9. Die Auflösung des Problems oder die Bewerkstelligung des Verlangten, auf welche die angezeigten Schlüsse geführt haben, ist diejenige, welche die Euklidische Construction und beigefügter Beweis angeben.

§. 10. Dabei ist es zunächst für die Auflösung der Aufgabe gleichgültig, ob sich die beiden Kreise einmal oder mehreremale, und ob sie bei einem Durchschnitt sich nur in einem Punkte oder in mehreren Punkten schneiden. Denn es wurde nicht mehr als Ein gleichseitiges Dreieck auf der AB verlangt; und dazu ist Ein gemeinschaftlicher Punkt der Peripherie der beiden genannten Kreise genug.

Andererseits aber ist es richtig, daſs zwei Kreise, die einander schneiden, sich nicht nur einmal, sondern wenigstens zweimal schneiden (S. ob. bei den Axiomen zweiter Klasse. Anh. 7.) S. 60.). Und es ist klar, daſs die beiden Durchschnitte an verschiedenen Seiten der AB Statt haben müſsen; weil z. B. die Peripherie des zweiten Kreises von A aus an jeder der beiden Seiten der AB fortlauft, also auch an beiden Seiten von Innen wieder nach Aufsen kommen muſs, indem sie ein Continuum ist, das den Kreis, eine eingeschlossene Figur, begränzt, und erwiesen worden ist, daſs ein Theil von ihr aufserhalb des Kreises liege. Und zu Folge dieser zwei Durchschnitte an den verschiedenen Seiten der AB, läſst sich auch an jeder Seite der AB ein gleichseitiges Dreieck beschreiben: welches in so fern zu bemerken ist, weil im Folgenden, wo man ein gleichseitiges Dreieck auf einer gegebenen zu beschreiben nöthig hat, es nicht immer gleichgültig ist, an welcher Seite der gegebenen dasselbe beschrieben werde, sondern dasselbe manchmal an einer bestimmten Seite derselben beschrieben werden muſs; wie z. B. in I, 9.

Daſs an einerlei Seite auf der gegebenen nicht mehr als Ein gleichseitiges Dreieck stehen könne, wird sich aus dem 7. Satze dieses B. folgern lassen.

Die Bestimmung, ob das, was eine Aufgabe verlangt, nur durch Eines bewerkstelligt werden könne, oder ob es mehr als Eines gebe, das der Aufgabe Genüge leiste, und auf wie viel Arten ihr Genüge geleistet werden könne, wird **Determination** der Auflösung genannt.

Ueber die Analysis dieser Aufgabe;
und von der Analysis im engern Sinne überhaupt.

§. 11. Die Reduction eines Problems kann von zweierlei Art seyn. Man reducirt es entweder auf etwas, davon man weifs, dafs, wenn man es machen kann, in Folge desselben auch das Problem aufgelöst werden könne; dergleichen die Reductionen im vorhergehenden waren: oder auf etwas, davon man weifs, dafs, wenn man das Problem aufgelöst werden soll, jenes auch mufs gemacht werden können. Gesetzt, das Problem sey, A zu machen; und man wisse: wenn man B macht, so hat man auch A: so kommt es darauf an, ob man B machen kann; und wenn dieses ist, so wird die Auflösung diese seyn: man mache B; und man wird auch A haben. Weifs man aber: wenn A seyn soll; so mufs auch B seyn: so kann man hieraus schliefsen: 1) Dafs, wofern B nicht möglich wäre, auch A nicht möglich sey; also das Problem unmöglich sey; 2) dafs, wenn man etwas macht, das mit B unvereinbar ist, durch dasselbe auch die Aufgabe, A zu machen, nicht aufgelöst seyn könne. Das erstere dient, um die Unmöglichkeit einer Aufgabe zu entdecken; das zweite für die Untersuchung, ob, wenn man einmal eine Auflösung hat, sich nicht deren mehrere geben lassen, oder für die Determination der Auflösung. Das B kann eine der näheren oder entfernteren Consequenzen des A sezn. Der Gang, den man beim letztern zu nehmen hat, ist demjenigen ähnlich, den man bei den indirecten Beweisen nimmt; indem man in beiden Fällen die Consequenzen dessen, wovon man ausgeht, entwickelt und schliefst, wenn man unter diesen auf etwas Unmögliches stöfst, dafs dasjenige, wovon man ausgieng, nicht möglich sey.

§. 12. Um die Anwendung auf das vorliegende Problem zu machen; so sind es zweierlei Sätze, wovon einer das Umgekehrte des andern ist:

a) Wenn man einen Kreis aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB, und einen andern aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA beschreibt: so schneiden die zwei Kreise einander, und zwei gerade Linien von deren Durchschnitt an A und B gezogen schliefsen mit der AB ein gleichseitiges Dreieck ein;

b) Wenn auf der AB ein gleichseitiges Dreieck ABC steht (oder stehen soll); und aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB, und aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA zwei Kreise beschrieben werden: so mufs

des Dreiecks Spitze C in den beiden Peripherien, und mithin in dem Durchschnitt der beiden Kreise liegen.

Dafs das erste (in a) richtig sey, ist im Vorhergehenden gezeigt worden: Dabei kann aber immer noch die Frage seyn: ob nicht ein anderer, als ein durch den genannten Durchschnitt erhaltener Punkt auch zur Auflösung der Aufgabe dienen könne? Diese Frage wird durch die Behauptung in b) verneint; aus welcher man folgern kann: Wenn irgend ein Punkt aufserhalb der gegebenen AE, der nicht den Peripherien der beiden genannten Kreise gemeinschaftlich ist, genommen wird: so schliefsen die von denselben nach A und B gezogenen geraden Linien mit der AB kein gleichseitiges Dreieck ein: Wodurch also die Frage von der Möglichkeit eines gleichseitigen Dreiecks auf der AB ganz allein auf die Frage von der Möglichkeit eines gemeinschaftlichen Punkts der beiden Peripherien reducirt wird. Und nun ist noch ferner in b) enthalten: Wenn es gar keinen gemeinschaftlichen Punkt der geraden Peripherien gäbe: so wäre auch kein gleichseitiges Dreieck auf der AB möglich. Dieses hat zwar hier in der Materie kein Interesse, weil es immer einen solchen gemeinschaftlichen Punkt gibt; hingegen kann in andern Fällen die dieser entsprechende Betrachtung von Bedeutung seyn.

§. 12. Dafs es aber mit der Behauptung in b) seine Richtigkeit habe, wird so bewiesen. Gesetzt es sei ACB ein gleichseitiges Dreieck auf der AB, und also jede der beiden AC und CB der AB (*Fig.* 8, a.) gleich. Da nun die AC der AB gleich ist; so wird der Punkt C nothwendig auf der Peripherie des aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB beschriebenen Kreises liegen müfsen; das ist, weder aufserhalb noch innerhalb des Kreises. Denn läge C aufserhalb des Kreises: so würde die AC den Kreis schneiden; es geschehe in D: Dann wäre die AD der AB gleich (Def. 15.); also AC gröfser als AB. Läge C innerhalb des Kreises (*Fig.* 8. b.): so würde die AC verlängert der Peripherie begegnen (s. oben zu den Axiomen zweiter Klasse. Anhang. nr. 5.)); es geschehe in E: dann wäre die AE der AB gleich (Def. 15.), und also AC kleiner als AB. Es ist also unmöglich, dafs, wenn ACB ein gleichseitiges Dreieck ist, der Punkt C anders als auf der Peripherie des genannten Kreises liege. Und ebenso, da auch die BC der BA gleich ist, wenn das Dreieck ACB gleichseitig ist; läfst

sich zeigen, dafs der Punkt C auch auf der Peripherie des aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA beschriebenen Kreises liegen müfse. Folglich ist der Punkt C ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Peripherien.

§. 13. Die Reduction einer Aufgabe auf ein Consequens, d. i. auf etwas anderes, das nothwendig Statt haben müfs, wenn dieselbe soll aufgelöst werden, heifst Analysis der Aufgabe, wenn noch ferner von diesem andern, worauf sie reducirt wird, ein Möglichkeit oder Unmöglichkeit als bekannt bemerkt oder erwiesen wird; die Möglichkeit in dem Sinne, dafs dasselbe wirklich geometrisch sich darstellen oder machen lasse, entweder vermittelst der Postulate, oder schon aufgelöster Probleme; dafs es ein πορισον sey, wie Pappus in Collect. Lib. VII. Praef. sich ausdrückt; oder dafs es ein Gegebenes sey (in dem Sinne, wie Euklid in seiner Schrift Data dieses Wort nimmt, da es nicht nur das unmittelbar und ursprünglich gegebene bezeichnet, sondern auch das, was sich aus dem unmittelbar gegebenen finden läfst.); die Unmöglichkeit aber auch, wo sie Statt hat. Denn es gibt auch unmögliche Aufgaben, und auch bei diesen eine Analyse. Wie z. B. wenn verlangt würde: (*Fig.* 9.) „Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises einen Punkt von der Beschaffenheit zu finden, dafs die zwei von ihm nach dem Mittelpunkt A des Kreises und nach einem gegebenen aufserhalb des Kreises liegenden Punkte B gezogenen geraden Linien mit der zwischen den beiden letztern Punkten liegenden geraden AB ein gleichseitiges Dreieck einschliefsen."

Gesetzt, C sey der verlangte Punkt, nämlich ACB ein gleichseitiges Dreieck: so ist demnach die AB der AC gleich. Da aber A der Mittelpunkt, B ein Punkt aufserhalb des Kreises ist: so mufs die AB den Kreis schneiden; es geschehe in D. Dann ist die AD der AC gleich (Def. 15.). Nun war auch die AB der AC gleich. Folglich (Ax. 1.) ist die AD der AB gleich, ein Theil dem Ganzen; welches unmöglich ist. Demnach ist es unmöglich, auf der Peripherie des gegebenen Kreises einen Punkt von der angegebenen Beschaffenheit zu finden; d. i. die Aufgabe ist unmöglich.

Hingegen ist in der Euklidischen Aufgabe I, 1. der Punkt C etwas, das sich aus dem unmittelbar gegebenen, nämlich der AB, finden läfst, etwas per consequens gegebenes: was noch zu beweisen ist, und zu dem, was §. 12. gesagt worden, hinzukommen mufs, um die Ana-

lysis jener Aufgabe zu beendigen. Der Beweis ist kurz dieser: Weil sich die beiden Kreise beschreiben lassen, vermöge des 3. Post., und einander schneiden, vermöge dessen, was oben bemerkt worden; so erhält man, indem man sie beschreibt, auch ihren Durchschnitt. Oder nach der Sprache Euklids in seinen Datis: weil des ersten Kreises Mittelpunkt A und ein Punkt B seiner Peripherie gegeben ist; so ist diese Peripherie eine der Lage nach gegebene Linie. Ebenso wird auch die Peripherie des zweiten Kreises eine der Lage nach gegebene Linie seyn. Wenn aber zwei einander schneidende Linien der Lage nach gegeben sind: so ist auch ihr Durchschnitt gegeben (ist ein allgemeiner Satz, welchen Euklid in seinen Datis, Prop. 25. d. griech. Text. vorträgt). Also ist der Punkt C, in welchem jene Peripherien sich schneiden, gegeben.

Man kann mit dem, was hier über die Analysis gesagt worden, vergleichen die Scholae logico mathematicae. Reutl. 1825. Cap. VIII., wo man einige weitere Bemerkungen über diesen Gegenstand finden wird.

§. 14. Scheubel in seiner Ausgabe der sechs ersten Bücher der Elemente Euklids (s. Chrestom. geom. p. 52.) trägt die Sätze mit ihren Beweisen so vor, dafs er die Figuren und ihre Theile bei jedem Satze blofs mit Worten beschreibt und benennt, ohne sich der Buchstaben, die man sonst gewöhnlich an die Figuren setzt, zu bedienen. Auf diese Weise liefse sich die Auflösung vorliegender Aufgabe so ausdrücken: Man beschreibe aus dem einen Endpunkte der gegebenen als Mittelpunkt mit der Weite von ihm bis zum andern Endpunkt einen Kreis; und ebenso aus dem andern Endpunkt als Mittelpunkt mit der Weite von ihm bis zum ersten Endpunkt einen andern Kreis: so werden die zwei Kreise einander schneiden; und wenn man von ihrem Durchschnitt an die beiden genannten Endpunkte gerade Linien zieht: so wird auf der gegebenen ein gleichseitiges Dreieck errichtet seyn.

§. 15. Man kann aus einem Problem mit seiner Auflösung einen Lehrsatz machen, indem man das, was nach den Vorschriften der Auflösung geschehen soll, zur Bedingung, und das, was die Aufgabe verlangt, zur Folge eines hypothetischen Satzes macht. Dieses bemerken, sowohl im Allgemeinen als in Anwendung auf vorliegende Aufgabe, Wolf in seiner Philosophia rationalis sive logica. 1728. §. 871., Savilius und Lam-

bert (s. Chrestom. geom. p. 176.) Hier wird der Lehrsatz dieser seyn: „Wenn man aus jedem der Endpunkte einer geraden Linie als Mittelpunkt mit der Weite von ihm bis zum andern Endpunkt einen Kreis beschreibt: so werden die zwei Kreise einander schneiden: und die von ihrem Durchschnitt an die genannten Endpunkte gezogenen zwei geraden Linien werden mit der ersten geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck einschliefsen." Oder: „Wenn der Durchschnittspunkt zweier aus den Endpunkten einer geraden Linie mit ebendieser als Radius beschriebenen Kreise die Spitze eines auf der geraden Linie beschriebenen Dreiecks ist: so ist das Dreieck gleichseitig." Allgemeiner: „Wenn eines jeden von zwei Kreisen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern liegt: so schneiden sie sich, und die drei geraden Linien, welche ihren Durchschnitt und die zwei Mittelpunkte, je zwei, mit einander verbinden, schliefsen ein gleichseitiges Dreieck ein."

§. 16. Aus der Analysis (§. 12. 13.) ergibt sich folgender Satz: „Wenn auf einer begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck errichtet ist: so liegt dessen Spitze in dem Durchschnitt zweier Kreise, die aus den Endpunkten der geraden Linie als Mittelpunkten, und mit den Weiten je von einem Endpunkte zum andern, beschrieben werden."

§. 17. In den ebenfalls §. 12. vorgetragenen Schlüssen ist auch folgender Satz begründet: a) „Wenn eine gerade Linie vom Mittelpunkte eines Kreises an seine Peripherie gezogen ist: so ist von andern geraden Linien, welche aus desselben Mittelpunkte gezogen werden, jede auf der Peripherie sich endigende der ersten gleich; jede ausserhalb des Kreises sich endigende gröfser als die erste; und jede innerhalb desselben sich endigende kleiner." Und umgekehrt: b) „Unter derselben Voraussetzung; wird von andern von demselben Mittelpunkte ausgehenden geraden Linien jede der ersten gleiche ihren Endpunkt in der Peripherie des Kreises, jede, die gröfser ist als die erste, ihren Endpunkt aufserhalb des Kreises, und jede, die kleiner ist, innerhalb des Kreises haben."

Der erste Theil des letztern Satzes b) wurde in §. 12. erwiesen: er folgt aus dem vorhergehenden Satze a) so: Hätte die der ersten gleiche ihren Endpunkt nicht auf der Peripherie: so hätte sie ihn innerhalb oder aufserhalb des Kreises. Aufserhalb des Krei-

ses aber kann sie ihn nicht haben: sonst wäre sie gröſser als die erste (Satz a, Thl. 2.). Innerhalb auch nicht: sonst wäre sie kleiner als die erste (Satz a, Thl. 3.). Folglich hat sie ihn auf der Peripherie. — Und auf ähnliche Art lassen sich die zwei übrigen Theile des Satzes b) erweisen.

§. 18. An die §. 6. 7. vorgetragenen Betrachtungen schlieſsen sich die Auflösungen folgender Aufgaben an:

(*Fig.* 7.) Es sey ein Kreis und eine gerade Linie AB gegeben, deren einer Endpunkt B auf der Peripherie, der andere A im Mittelpunkt; man kann aber dafür allgemeiner setzen: irgendwo innerhalb des Kreises gegeben ist: man soll von dem ersten Endpunkt B aus eine der BA gleiche gerade Linie an den Kreis ziehen (das heiſst: so daſs sie ihren andern Endpunkt in der Peripherie des gegebenen Kreises habe, in dessen Peripherie sich endige.)

Man kann den einen Endpunkt B statt auf der Peripherie, auch auſserhalb des Kreises setzen; und es wird sich auf ähnliche Art auch folgende Aufgabe auflösen lassen: „Es ist ein Kreis und eine denselben schneidende gerade Linie AB gegeben, deren einer Endpunkt B auſserhalb, der andere A innerhalb des Kreises liege: man soll von dem äuſsern Endpunkt B aus eine der BA gleiche gerade Linie an den Kreis ziehen." Oder auch: „Es sey ein Kreis, und in dessen Ebene zwei Punkte, der eine A innerhalb, der andere B auſserhalb des Kreises gegeben: man soll von dem äuſsern Punkte B zwei gerade Linien an den Kreis ziehen, welche beide der zwischen den zwei gegebenen Punkten liegenden geraden Linie AB gleich seyen."

§. 19. So werden sich auch folgende Aufgaben über Dreiecke auf ähnliche Art wie die in I, 1. auflösen lassen:

(*Fig.* 10.) „Es sey eine begränzte gerade Linie AB und auf ihr ein Punkt C gegeben: man soll ein gleichschenklichtes Dreieck auf der AB beschreiben, welches am Punkt A einen der AB gleichen Schenkel, und am Punkt B eine der BC gleiche Grundlinie habe."

(*Fig.* 11.) „Es sey eine gerade Linie AB, und auf ihr zwei Punkte C, D gegeben, von welchen C näher bei B sey als D: man soll ein Dreieck auf der AB beschreiben, dessen in A sich endigende Seite der AC, die in B sich endigende der BD gleich sey."

Weniger bestimmt wären die Aufgaben: „Ein gleichschenklichtes Dreieck mit gegebenem Schenkel und

Spitze beschreiben." „Ein Dreieck mit einer gegebenen Seite beschreiben, dessen zwei übrige Seiten, jede für sich, kleiner als diese seyen."

§. 20. So auch folgende Aufgaben:

a) (*Fig.* 12.) Es seyen zwei von einem Punkt A ausgehende und nicht geradefort an einander liegende gerade Linien AB, AC gegeben: man soll der einen AB eine der andern AC gleiche im gemeinschaftlichen Endpunkt A geradefort ansetzen.

b) (*Fig.* 13.) Es seyen zwei von einem Punkt A ausgehende ungleiche gerade Linien AB, AC gegeben, von welchen die kleinere AC nicht auf der gröfseren AB liege: man soll von der gröfsern AB ein der kleinern AC gleiches Stück vom gemeinschaftlichen Endpunkt A an abschneiden.

c) (*Fig.* 14.) Es seyen zwei von einem Punkt A ausgehende und einen Winkel mit einander machende ungleiche gerade Linien AB, AC gegeben: man soll auf der gröfseren AB ein Dreieck beschreiben, dessen in A sich endigende Seite der AB gleich, die in B sich endigende um die AC gröfser oder kleiner als die AB sey.

Aufl. Man setze der AB eine der AC gleiche AD geradefort an (nach a), und schneide von ihr ein der AC gleiches Stück AE ab (nach b): beschreibe einen Kreis aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB, und einen andern aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BD im einen, BE im andern Fall: so werden diese Kreise einander schneiden, und in ihrem Durchschnitt wird die Spitze des verlangten Dreiecks seyn.

d) (*Fig.* 10.) Es sey eine begränzte gerade Linie AB, und auf ihr irgend ein Punkt C gegeben: man soll auf ihr ein Dreieck beschreiben, dessen in A sich endigende Seite den zweien AB, BC zusammen, die in B sich endigende den zweien BA, AC zusammen gleich sey.

§. 21. Dieser erste Satz der Elemente enthält eine particuläre Auflösung der weniger bestimmten Aufgabe: „Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie als Seite ein Dreieck errichten, dessen zwei übrige Seiten einander gleich seyen;" oder auch: „An zwei (in einer Ebene) gegebene Punkte irgend zwei einander gleiche und in einem Endpunkt zusammenlaufende gerade Linien legen." Sind nämlich die zwei gegebenen Punkte A, B; und man zieht die gerade AB, und errichtet auf ihr ein gleichseitiges Dreieck ACB: so sind damit an

die Punkte A, B zwei gleiche und in einem Endpunkt C zusammenlaufende gerade Linien AC, BC gelegt.

§. 22. Für die Sätze I, 2. 9. 10. 11., welches die einzigen sind, wobei I, 1. gebraucht wird, und also für den ganzen Bedarf des folgenden Systems der Elemente, wäre irgend eine particuläre Auflösung der §. 21. angegebenen weniger bestimmten Aufgabe hinreichend. Statt der in I, 1. enthaltenen aber liefse sich von derselben auch folgende andere particuläre Auflösung geben.

(*Fig.* 15.) Man verlänger die AB über B hinaus nach C, und über A hinaus nach D; und schneide von der BC eine der BA gleiche BC ab (welches geschieht, indem man aus dem Mittelpunkte B mit der Weite BA einen Kreis beschreibt, der die BC schneiden wird; er schneide sie in E.). Ebenso schneide man von der AD eine der AB gleiche AF ab. So werden die AE und BF einander gleich seyn; nämlich jede ist das Doppelte der AB. Man beschreibe einen Kreis aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AE, und einen andern aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BF: so wird der letztere die BC schneiden (s. zu den Axiomen zweiter Klasse. Anhang, nr. 7.); und zwar an einer Stelle von E nach C. Denn wäre dieses nicht: so schnitte er sie entweder im Punkt E oder zwischen B und E. Im Punkt E aber kann er sie nicht schneiden: sonst wäre, da B der Mittelpunkt des Kreises ist, und E und F Punkte seiner Peripherie wären, die BE der BF gleich (Def. 15.), und also gröfser als die BA; welcher sie doch gleich gemacht worden ist. Auch kann er sie nicht zwischen B E und schneiden: denn schnitte er sie in einem Punkte G zwischen B und E; so wäre, da B der Mittelpunkt des Kreises ist, und G und F Punkte seiner Peripherie wären, die BG der BF gleich (Def. 15.), und also gröfser als die BA; der BA ist aber die BE gleich gemacht; also wäre die BG gröfser als die BE, d. i. ein Theil gröfser als das Ganze: welches nicht möglich ist. Da demnach der zweite Kreis die BC weder in E noch in einem Punkt zwischen B und E schneiden kann, sie aber doch schneiden mufs: so wird er sie an einer Stelle von E nach C schneiden: es geschehe bei H. Da demnach die Peripherie des zweiten Kreises durch den Punkt H aufserhalb des ersten Kreises geht, aber auch durch den Punkt F innerhalb desselben: so mufs er den ersten Kreis schneiden; es geschehe in K; und man ziehe die geraden AK, BK. So ist (Def. 15.) die

AK der AE, und die BK der BF gleich. Es ist aber auch die AE der BF gleich, wie gezeigt worden. Folglich sind auch die AK, BK einander gleich. Es ist also auf der Seite AB ein Dreieck AKB errichtet worden, dessen zwei übrigen Seiten AK, BK einander gleich sind: welches verlangt wurde.

Hier ist jede der übrigen Seiten doppelt so grofs als die AB: statt dafs sie in I, 1. der AB gleich sind. Auf eine einfachere Weise, als hier die AE und BF gefunden worden sind, an die Punkte A und B zwei einander, doch nicht der AB, gleiche gerade Linien zu legen, welche man sodann als Halbmesser der zu beschreibenden zwei Kreise braucht, geht hier, wo man die Aufgabe I, 2. nicht voraussetzen darf, nicht an. Es ist aber augenscheinlich die hier gegebene Auflösung der in §. 21. ausgedrückten Aufgabe merklich weitläufiger als die Euklidische Auflösung derselben durch I, 1.

§. 23. Anderer Ausdruck der Aufg. I, 1. „Es seyen zwei Punkte (in einer Ebene) gegeben: man soll einen dritten von der Beschaffenheit finden, dafs, wenn man je zwei dieser Punkte durch eine gerade Linie verbindet, diese drei gerade Linien einander gleich seyen."

Anderer Ausdruck der Aufgabe in §. 21. „Es seyen zwei Punkte gegeben: man soll einen dritten von der Beschaffenheit finden, dafs die zwei geraden Linien von ihm an den ersten und zweiten einander gleich seyen."

Die Aufgabe aber: „Es seyen zwei Punkte gegeben: man soll einen dritten von der Beschaffenheit finden, dafs die zwei gerade Linien von dem ersten an den zweiten und dritten einander gleich seyen;" wird durch jeden Punkt der Peripherie eines Kreises aufgelöst, den man aus dem ersten als Mittelpunkt und mit der Weite von ihm bis zum zweiten beschreibt.

Anwendungen der Aufgabe I, 1. Auf zwei gegebenen gleichen geradefort aneinander liegenden geraden Linien als Grundlinien zwei Dreiecke beschreiben, welche eine Seite einer Seite gleich, und die andere gemeinschaftlich haben." Diese Anwendung kommt in I, 11. vor.

„Auf zwei einander gleichen und einen Winkel mit einander machenden geraden Linien als Grundlinien zwei Dreiecke beschreiben, welche eine Seite einer Seite gleich, und die übrige gemeinschaftlich haben." In I, 9.

§. 24. Andere weniger bestimmte Aufgaben, welche sich durch I, 1. auflösen lassen. wären:

„Irgend ein gleichseitiges Dreieck (in einer gegebenen Ebene) verzeichnen." Wird aufgelöst, indem man (in der Ebene) eine gerade Linie AB nach Belieben zieht, und auf ihr ein gleichseitiges Dreieck beschreibt.

„Ein gleichseitiges Dreieck (in einer vorgelegten Ebene) beschreiben, welches seine Spitze (oder einen seiner Winkelpunkte) in einem auf derselben gegebenen Punkte A habe."

„Auf einer gegebenen unbegränzten geraden Linie AB ein gleichseitiges Dreieck construiren."

Man nehme auf der AB irgend zwei Punkte C, D, und beschreibe auf der CD ein gleichseitiges Dreieck: so kann man sagen, es sey auf der unbegränzten AB construirt.

„Ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, dessen Perimeter durch zwei gegebene Punkte C, D gehe." Man beschreibe es auf irgend einem Stück der durch C, D gezogenen geraden Linie, auf welchem diese zwei Punkte sich befinden.

§. 25. Mehr bestimmte Aufgaben wären:

„Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie an einer angegebenen Seite derselben ein gleichseitiges Dreieck construiren." Es sey die gegebene AB, und ein Punkt ausser ihr, D, gegeben: man soll auf der AB ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, und zwar an derjenigen Seite von ihr, an welcher der Punkt D liegt."

„Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie zwei gleichseitige Dreiecke, an jeder Seite eines, beschreiben." — Diese beiden Aufgaben lassen sich durch die Construction von I, 1. auflösen; wie schon §. 10. bemerkt worden ist.

Hingegen „auf einer gegebenen begränzten geraden Linie, und an einer und eben derselben Seite von ihr, zwei gleichseitige Dreiecke beschreiben," ist unmöglich vermöge I, 7.

„Ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, welches einen gegebenen geradlinigten Winkel BAC zu einem seiner Winkel habe;" wäre eine entweder unmögliche oder unbestimmte Aufgabe, vermöge des folgenden I, 5. 32.

Folgende Aufgaben: „Es sey eine in A begränzte, nach der andern Seite unbegränzte gerade Linie AB, und ausser ihr ein Punkt C gegeben; ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, dessen zwei Seiten zum Endpunkt A haben, und die eine auf der AB liege, die übrige Seite aber durch C gehe."

Ferner: „Ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, dessen eine Seite auf einer gegebenen unbegränzten AB liege, und dessen Spitze in einem ausserhalb der AB gegebenen Punkte C sey;" — sind möglich und bestimmt, aber erst vermittelst folgender Theorien auflösbar; namentlich setzen sie I, 31. 32. voraus.

Hingegen die Aufgabe: „Es sey eine unbegränzte gerade Linie AB (*Fig.* 16.) und ausserhalb ihr ein Punkt C gegeben: man soll ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, das seine Spitze in C, und seine Grundlinie auf der AB liegen habe;" ist eine mögliche, etwas unbestimmte, hier schon auflösbare Aufgabe. Man nehme an der andern Seite der AB, als an welcher C liegt, irgend einen beliebigen Punkt D; und beschreibe aus dem Mittelpunkt C mit der Weite CD einen Kreis; der die AB in zwei Punkten schneiden wird (s. oben, zu den Axiomen zweiter Klasse, Anhang, nr. 5.)); sie seyen E und F: man ziehe die geraden CE, CF: so ist CEF ein solches Dreieck, wie verlangt worden; und es ist offenbar, dafs, indem man den Punkt D immer anders und anders nimmt, unzählige solche Dreiecke sich machen lassen. Von dieser Aufg. wird in I, 12. implicite Gebrauch gemacht.

Satz II. u. III.

§. 26. Die Aufgaben des II. und III. Satzes verhalten sich wie eine weniger bestimmte und eine mehr bestimmte, von welchen die letztere alle dieselben Bedingungen wie die erstere, und nur noch eine Bedingung weiter zu erfüllen verlangt. Es liegt aber in der Natur der Sache, dafs die Bewerkstelligung der mehr bestimmten an sich schon auch eine Bewerkstelligung der weniger bestimmten enthält. Wie z. B. in §. 21. 23. bemerkt wurde, dafs die Auflösung der mehr bestimmten Aufgabe: Auf einer gegebenen Seite ein Dreieck beschreiben, dessen alle drei Seiten einander gleich seyen; an sich schon eine Auflösung der weniger bestimmten ist: Auf einer gegebenen Seite ein Dreieck beschreiben, dessen zwei übrige Seiten einander gleich seyen. Eine der gegebenen C gleiche von der gröfsern AB (*Fig.* 17.), von ihrem Endpunkt an, abschneiden; was im Satz III. gelehrt wird; heifst soviel als: Eine der C gleiche an den Punkt A legen, was in Satz II. verlangt wird; nur mit der weitern Bestimmung, dafs sie in die Richtung der

gegebenen gröfsern AB fallen, oder von A nach B zu liegen soll. Wer eine der C gleiche AB von der AB abgeschnitten hat, der hat eben damit an den Punkt A eine der C gleiche AE gelegt: und wer an den Punkt A eine der C gleiche legen soll, der darf nur von A aus irgend eine unbegränzte AB, die gröfser als C ist, ziehen, und von ihr die AE der C gleich abschneiden. Demnach wäre die Aufgabe des Satzes II. überflüssig, wenn die des IIIten ohne sie aufgelöst würde. Es ist aber manchmal, und so auch hier der Fall, dafs eine weniger Bedingungen habende Aufgabe, als leichter aufzulösen, vorangeschickt, und die Auflösung der eine Bedingung weiter habenden darauf gegründet wird: wie z. B. auch in I, 42. 44.

§. 27. Man kann zu der Aufgabe S. III. die Bedingung hinzusetzen: „von einem ihrer Endpunkte an, welcher angegeben wird;" oder, wie man auch sich ausdrücken könnte: „an einer angegebenen Seite derselben," (ad partes assignatas; ähnlich mit dem, was §. 25. zu S. I. bemerkt worden, nur dafs der Ausdruck: an einer Seite, in beiden Fällen verschiedentlich genommen wird.) Das Abschneiden kann vom Endpunkt A oder vom Endpunkte B an verlangt, und in einem Fall wie im andern ausgerichtet werden. In sofern hätte die Aufgabe in S. III. zwei Auflösungen: doch ist es meistens bei den Anwendungen nicht gleichgültig, von welchem Endpunkte an abgeschnitten wird; sondern es wird gewöhnlich von einem bestimmten Endpunkte an erfordert.

§. 28. Betreffend nun die Aufgabe S. III., so haben die gröfsere, von welcher, und die kleinere, welcher eine gleiche abgeschnitten werden soll, entweder denjenigen Endpunkt, von welchem an von der gröfsern abgeschnitten werden soll, gemeinschaftlich oder nicht.

(*Fig.* 18.) Im ersten Fall geschieht die Auflösung durch Post. 3.; indem man aus dem gemeinschaftlichen Punkt A als Mittelpunkt, mit der Weite von ihm zum andern Endpunkt D der kleinern AD, einen Kreis beschreibt, der die gröfsere AB schneiden, und ihren an dem gemeinschaftlichen Endpunkte A liegenden Abschnitt AE der AD gleich machen wird.

Von diesem ersten Hauptfall kommen Anwendungen im I. B. vor, bei den Beweisen der Lehrsätze I, 5. 16. 18. 20.; auch noch bei I, 24. kann man damit ausreichen; und bei Auflösung der Aufgaben I, 9. 11. 46.

Allein mit diesem Falle reicht die Geometrie nicht aus. Die ebene Geometrie erfordert, dafs man jede in einer Ebene gegebene Länge an jeden in derselben bezeichneten Punkt hin in eine bezeichnete Richtung tragen könne; wie auch, dafs man jeden in einer Ebene gegebenen geradlinigten Winkel an einen in derselben bezeichneten Schenkel und Spitze hin tragen könne. Und die Auflösung dieses letztern Problems setzt die des erstern voraus; wie aus dessen Auflösung in I, 23. vgl. mit I, 22. erhellt. Ferner wird der zweite Hauptfall im I. B. gebraucht zum Beweis der Lehrsätze I, 6. 26.

§. 29. Der zweite Hauptfall nun läfst sich auf den ersten durch folgende Betrachtungen reduciren.

1) (*Fig.* 19.) Gesetzt es sey in einem Dreieck, dessen Seiten DA und DB gleich sind, die eine derselben verlängert um die Länge BG; und man soll an den Punkt A eine der BG gleiche legen: so wird dieses geschehen, wenn man die Seite DA um eine der BG gleiche verlängert: man setze, diese sey AL; so kommt es darauf an, den Punkt L zu finden. Nun ist offenbar, dafs, wenn die AL der BG gleich werden soll, da schon die DA der DB gleich ist, auch die ganze DL der ganzen DG gleich werden mufs; indem zu den gleichen DA, DB gleiche AL, BG hinzukommen; Gleiche aber zu Gleichen hinzugesetzt, gleiche Ganze machen (Ax. 2.). Also kommt es darauf an, den Punkt L so zu finden, dafs die DL der DG gleich werde: das heifst, von der nach E verlängerten DA eine der DG gleiche DL abzuschneiden: welches vermöge des ersten Hauptfalls geschehen kann; indem man nämlich aus dem Mittelpunkt D mit der Weite DG einen Kreis beschreibt, der die DE schneiden wird, und zwar über A hinaus, nicht im Punkt A, noch zwischen D und A: denn schnitte er sie in A; so wäre (Def. 15.) die DA der DG gleich, und also auch die DB der DG gleich, ein Theil dem Ganzen; welches nicht möglich ist. Schnitte er sie aber zwischen D und A, wie in M: so wäre die DM der DG gleich, und also die DA gröfser als die DG; mithin auch die DB gröfser als die DG, d. h. ein Theil gröfser als das Ganze, welches unmöglich ist. Folglich kann der Kreis die DE weder in A noch zwischen D und A schneiden; er mufs sie also über A hinaus schneiden. Es geschehe in L: so ist L der verlangte Punkt, und AL eine der BG gleiche gerade Linie an A gelegt; was verlangt wurde. Hienach ist die Aufgabe: Eine einer gegebenen am

Punkte B liegenden gleiche gerade Linie an einen andern gegebenen Punkt A zu legen, für den Fall aufgelöst, wenn auf der die Punkte A, B verbindenden geraden Linie AB ein gleichseitiges oder gleichschenklichtes Dreieck DAB steht, und die an B liegende auf der Verlängerung des Schenkels DB liegt.

2) Gesetzt aber, die am Punkte B liegende gegebene liege nicht auf der Verlängerung von DB, sondern anders, wie die BC: so reducirt sich dieser Fall auf den vorigen, indem man, wenn die DB nach F verlängert wird, vermöge des ersten Hauptfalls die BC von B an auf die Verlängerung BF tragen, oder eine der BC gleiche BG von der BF abschneiden kann. Hienach wäre also die Aufgabe: an den gegebenen Punkt A eine der an einem andern Punkt B liegenden BC gleiche gerade Linie zu legen, für den Fall aufgelöst, wenn auf der die Punkte A, B verbindenden geraden Linie ein gleichseitiges oder gleichschenklichtes Dreieck steht.

3) Nun aber läfst sich, es mögen A und B Punkte in einer Ebene seyn, welche man will, immer die gerade AB ziehen, und auf dieser ein gleichseitiges Dreieck errichten, vermöge S. I. Folglich läfst sich die Aufgabe: An den gegebenen Punkt A eine der an einem andern gegebenen Punkt B liegenden gleiche zu legen, für jede zwei gegebene Punkte A, B und für jede an dem andern Punkt B liegende gerade Linie BC auflösen.

4) Und vermittelst dieses wird auch der zweite Hauptfall der Aufgabe S. III.: „Von der gegebenen gröfsern AB eine der gegebenen kleinern C, die nicht mit der AB den Endpunkt A, von welchem an abgeschnitten werden soll, zum gemeinschaftlichen Endpunkt hat, gleiche gerade Linie abschneiden," dadurch, dafs man vermittelst des vorigen an A eine der C gleiche legt, auf den ersten Hauptfall reducirt seyn.

§. 30. Die Construction aber der Aufgabe in 3) §. 29., das ist des II. Satzes der El. wird diese seyn: Es sey die BC gegeben, welche an B liegt, und eine ihr gleiche an A zu legen. Man ziehe die AB, wofern nicht bereits die Punkte A, B durch eine gerade Linie verbunden sind, welches der Fall ist, wenn der Punkt A auf der BC selber zwischen ihren Endpunkten gegeben ist; in welchem Falle man nicht erst nöthig hat die AB zu ziehen. Auf der AB beschreibe man (I, 1.) ein gleichseitiges Dreieck DAB; verlängere seine Seiten DA, DB nach E, F; und schneide von der BF die BG

der BC gleich ab (nach dem ersten Hauptfall); alsdann schneide man von der DE die DL der DG gleich ab (wiederum nach dem ersten Hauptfall): so wird AL die verlangte seyn. — Dieses ist die Euklidische Construction, durch die Berufung auf den ersten Hauptfall abgekürzt.

Und der Beweis: Da die ganze DL der ganzen DG, und das Stück DA dem Stück DB gleich ist: so wird auch das übrige Stück AL dem übrigen Stück BG gleich seyn; weil gleiche Stücke von gleichen Ganzen weggenommen, die übrigen Stücke gleich zurücklassen (Ax. 3.) Die BC ist aber der nämlichen BG gleich. Folglich sind auch die AL, BG einander gleich.

§. 31. Die Euklidische Construction, die den ersten Hauptfall, da der Punkt A mit einem der Endpunkte der BA zusammenfällt, nicht voraussetzt, schliefst übrigens auch diesen Fall in sich, und ist also allgemein für beide Hauptfälle. Denn es falle der Punkt A mit dem Endpunkt C zusammen; d. h. es sey die gerade Linie BA gegeben, und an ihren Endpunkt A eine ihr gleiche zu legen (*Fig.* 19.). So ist nach Errichtung des gleichseitigen Dreiecks DAB auf der AB, der Kreis aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA zu beschreiben, welcher die BF in G schneide; und alles übrige bleibt in der Euklidischen Construction und Beweise, aufser dafs man statt der BC die BA hat.

§. 32. Die Leichtigkeit, mit welcher man vermittelst eines gewöhnlichen Handzirkels jede Länge an jeden gegebenen Punkt auf einer Ebene bringt, und an diesem Punkt noch überdiefs in jede beliebige Richtung legt, und die Verwechslung dessen, was man vermittelst dieses Instruments bewerkstelligen kann, mit dem, was das dritte Postulat ausspricht, können Anlafs geben, die Aufgaben des zweiten und dritten Satzes als überflüssig und schon im dritten Postulat enthalten, oder wenigstens die Umständlichkeit der in der Euklidischen Auflösung vorgeschriebenen Construction als unnöthig anzusehen. Vermittelst jenes Instruments läfst sich kürzer und geschwinder durch Eine Operation von einer gegebenen gröfsern geraden Linie ein einer gegebenen kleinern gleiches Stück abschneiden, als ein gleichseitiges Dreieck auf einer gegebenen beschreiben, wozu man, um nur seine Spitze zu finden, zwei Kreise zu beschreiben, und dann erst noch von dem Durchschnitt, der die Spitze gibt, zwei gerade Linien zu ziehen, also vier Operationen braucht. Warum soll man also das leich-

tere durch einen mühsamen Umweg vermittelst des schwereren suchen?

Das dritte Postulat besagt, wie schon oben bei den Postulaten bemerkt worden, nichts weiter, als dafs man, wenn zwei Punkte in einer Ebene gegeben sind, aus dem einen als Mittelpunkt einen Kreis soll beschreiben können, dessen Peripherie durch den andern gehe. Hienach kann man, wenn man den Punkt L bereits hat, der die AL der BC gleich macht, unzählige gerade Linien an A legen, die alle der BC gleich sind, indem man aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AL einen Kreis beschreibt: nämlich jede von A an dessen Peripherie gehende ist der BC gleich. Aber vorerst ist die Frage: Wie ein solcher Punkt wie L zu finden sey, der die AL der BC gleich mache; ohne etwas anderes vorauszusetzen, als dafs man aus jedem Mittelpunkt einen Kreis beschreiben könne, der durch einen gegebenen Punkt gehe? Und die Beantwortung dieser Frage ist eben der Gegenstand des zweiten Satzes. Dieser Beantwortung hält sich der Geometer dadurch, dafs eine mechanische Vorrichtung, ein Instrument bekannt ist oder sich verfertigen läfst, durch welche das Gesuchte mit Einer Operation sich finden lasse, ebenso wenig überhoben, als er sich der Mühe, zu zeigen, wie ein Perpendikel auf einer gegebenen geraden Linie in einem auf ihr gegebenen Punkte errichtet, oder auf eine gegebene gerade Linie aus einem aufserhalb ihr gegebenen Punkte gefällt werden könne, oder an eine gegebene gerade Linie und einen auf ihr gegebenen Punkt ein einem gegebenen Winkel gleicher Winkel hingetragen werden könne, ohne etwas weiteres als die drei Postulate vorauszusetzen, durch die Möglichkeit oder Existenz eines Winkelmafses oder eines Transporteurs für überhoben hält, wodurch jene Aufgaben sich mechanisch auflösen lassen. Der wissenschaftlichen Erkenntnifs kömmt es zu, das Zusammengesetztere, so weit es sich thun läfst, auf das Einfachere zurückzuführen; und, wenn einiges wenige übrig bleibt, das sich nicht mehr auf ein Einfacheres zurückführen läfst, dasselbe offen darzulegen, und zu zeigen, wie sich das übrige daraus zusammen setzen lasse. Jenes Wenige legt Euklid in seinen drei Postulaten dar, und zeigt das letztere in seinen Problemen.

Wollte man sagen: es sey nun doch einmal zu Bewerkstelligung dessen, was das dritte Postulat erfordert, ein Instrument nöthig; und wenn dieses die Aufgaben

des II. u. III. Satzes ebenso leicht, als was das dritte Postulat verlangt, bewerkstellige; so sollte man diese zwei leztern Aufgaben ebenfalls zu Postulaten machen: so ist weder die eine, noch die andere von diesen Behauptungen richtig. Das Instrument gebrauchen wir blofs zur sinnlichen Darstellung der Idee: die Geometrie hat es mit der letztern zu thun, welche der Verstand ohne allen Gebrauch eines Instruments sich vorstellen kann. Sie verlangt, dafs man sich vorstellen könne, dafs mit jeglichem Mittelpunkt ein mit seiner Peripherie durch jeden andern Punkt in derselben Ebene gehender Kreis beschrieben werden könne; und diese Möglichkeit vorausgesetzt, betrachtet sie, was für andere Möglichkeiten daraus folgen. Die sinnliche Darstellung ist Nebensache: und zu dieser wird blofs ein solches Instrument erfordert, durch welches um einen festen Punkt ein anderer in einerlei Ebene in immer gleichen Entfernungen von jenem sich herumführen lasse; nicht ein solches, wodurch sich auch noch überdiefs die nämliche Entfernung anders wohin in der Ebene tragen lasse. Indem der gewöhnliche Handzirkel beides leistet, so leistet er mehr, als das dritte Postulat fordert: er leistet auch, was in den Aufgaben S. II. u. III. verlangt wird. Die Geometrie reicht aber mit dem dritten Postulat aus, und führt die zwei letztern Aufgaben auf die drei Postulate zurück. S. ob. (S. 28.), was Barrow von den Mathematikern sagt: „Parcissime quidvis petunt, adsumunt aut praesupponunt etc."

§. 33. Proclus äufsert den Gedanken (s. Chrest. geom. p. 194.): Dafs auch um des vierten Satzes willen die vorangehende Auflösung der Aufgabe S. II. nöthig sey, weil in der Bedingung des vierten gleiche gerade Linien an verschiedenen Punkten A und D (s. Fig. des 4ten Satzes), nämlich die AB der DE, und die AC der DF gleich angenommen werden. Dagegen macht Savilius (a. a. O.) die gegründete Instanz: aus gleichem Grunde müfste dem S. IV. auch noch die Aufgabe in S. XXIII. vorangehen: Einem gegebenen Winkel einen gleichen anders wohin zu legen, weil in Satz IV. auch gleiche Winkel BAC, EDF an den verschiedenen Punkten A, D vorausgesetzt werden. Es lassen sich aber gleiche gerade Linien an zwei verschiedenen Punkten A und D gedenken, und läfst sich davon sprechen, was unter der Voraussetzung, dafs man solche habe, weiter erfolgen werde, ohne dafs man vorher weifs, wie man es anzugreifen habe, um an zwei verschiedenen Punkten gleiche gerade Linien zu

bekommen. Wenn behauptet wird, dafs unter einer gewifsen Bedingung eine gewifse Folge existire: so wird damit nicht behauptet, weder dafs die Bedingung immer und in allen Fällen Statt habe; ja wenn dieses letztere richtig und bekannt wäre; so müfste man vielmehr kategorisch, dasjenige als schlechthin existirend aussprechen, was man nur hypothetisch unter der Bedingung und als Folge dieser ausgesprochen hatte: noch auch, dafs sie in einzelnen Fällen Statt habe, und wenigstens überhaupt möglich sey; wiewohl dieses letztere der gewöhnliche Fall ist, und in den Elementen wenigstens keine hypothetische Sätze mit unmöglichen Bedingungen vorkommen. Unter gewifsen Umständen aber lassen sich allerdings auch solche Sätze gebrauchen, wenn es z. B. darum zu thun ist, die Möglichkeit einer gewifsen Voraussetzung dadurch zu prüfen, dafs man ihre Consequenzen entwickelt, um zu sehen, ob in diesen nichts Falsches oder Unmögliches enthalten sey; besonders wenn diese Consequenzen in einer langen Reihe von einander abhängiger Glieder zu verfolgen sind: wovon man ein Beispiel in den Untersuchungen findet, welche Saccherius und Lambert in Hinsicht auf die Begründung der Parallelentheorie über dasjenige, was beim ersteren Hypothese des stumpfen und spitzigen Winkels heifst, angestellt haben. (S. Camerer Edit. Eucl. Elem. p. 423—426.). Im Allgemeinen ist es genug, wenn eine Bedingung nur überhaupt etwas Gedenkbares ist, um von ihren Folgen zu reden. Die Betrachtung eines bedingten Satzes ist etwas provisorisches und sein Inhalt eventuell, bis man auf einen Fall stöfst, oder dem Leser einen Fall vorführt, wo dasjenige eintritt, was dort Bedingung war: für diesen Fall hat man alsdenn vorausgearbeitet, indem man bereits gesehen hat, was daraus noch weiter folgen werde. Etwas Hypothetisches findet fast bei allen Lehrsätzen und Aufgaben Statt, nur dafs in vielen die Hypothesis oder Bedingung etwas ist, das entweder sonst schon als wirklich existirend vorgekommen, oder als solches aus den Postulaten folgt, oder an sich klar und leicht gedenkbar ist: wie z. B. in der Aussage von I, 13. dafs eine gerade Linie auf einer andern aufstehe und Winkel mit ihr mache; von I, 15., dafs zwei gerade Linien einander schneiden; von I, 16. 20., dafs es Dreiecke gebe, und dafs man eine Seite eines Dreiecks verlängern könne. In I, 5. ist davon die Rede, was erfolgen werde, wenn es Dreiecke gebe, die zwei

Seiten gleich haben: ob es nun solche gebe, geht den Satz an sich nichts an; man hat aber schon ein Beispiel davon in I, 1. gehabt, und man könnte es schon aus Post. 3. u. 1. verb. mit Def. 15. schliefsen. — Hätte Euklid dem 47. Satz B. I. den 46sten nicht vorausgeschickt: so würde der 47ste besagen: wenn auf den Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks Quadrate beschrieben sind; so sind zwei unter ihnen dem dritten gleich: und in dieser hypothetischen Form wäre der Satz durch den dort gegebenen Beweis auch ohne I, 46. dargethan; dabei aber unentschieden, ob man nicht von einer unmöglichen Sache gesprochen, und ob sich auch nur überhaupt solche Figuren, die man Quadrate heifst, beschreiben lassen. Hingegen erfordert der Beweis des I, 48. schlechterdings den 46ten: denn in jenem Beweis (s. Fig. des Satzes) wird ein rechtwinklichtes Dreieck CAD gemacht, und aus dessen Seiten die Quadrate als zu beschreiben möglich vorausgesetzt: sonst wäre die Wahrheit des Satzes I, 48. immer noch durch eine Möglichkeit bedingt, von der man nicht versichert wäre. Aber um dieses Gebrauchs im Folgenden willen, wie auch um die Quadrate nicht in den einzelnen Fällen, da I, 47. angewandt wird, jedesmal erst machen zu dürfen; hat er den 46sten vorangeschickt, und die Aussage des 47sten ohne Bedingung so gefafst, dafs dieselbe als die jedesmalige Construirbarkeit der Quadrate der Seiten involvirend angesehen werden kann. — Wenn einige den Satz I, 5. mittelst Halbirung des Winkels BAC beweisen, welche vorher nicht gelehrt worden (s. Chrestom. geom. p. 204.): so besagt ihr Beweis nur so viel: Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck der Winkel an der Spitze sich halbiren läfst, oder wenn (was mit jenem in wechselseitiger Verbindung steht) überhaupt jeder geradlinigte Winkel sich halbiren läfst: so sind die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks einander gleich: Und da auf dem Satz I, 5. der Beweis der Sätze I, 7. 8. beruht, und die Auflösung der Aufgabe in I, 9. auf dem I, 8.: so wäre in I, 9. am Ende nur so viel dargethan: Wenn überhaupt jeder geradlinigte Winkel sich halbiren läfst: so wird der hier vorgelegte Winkel, wenn man die vorgeschriebenen Operationen an ihm vornimmt, halbirt seyn: also wieder nur hypothetisch; nicht kategorisch, wie man es haben sollte: Er ist gewifs halbirt. Dieses ist einer von den Gründen, warum nach Euklids Methode bei keinem

Beweis eines Lehrsatzes eine Construction gebraucht wird, die nicht vorher gelehrt worden ist: weil man sonst immer die Möglichkeit dieser Construction mit unter die Bedingungen des Lehrsatzes aufnehmen, und diese Bedingung auch bei folgenden darauf gegründeten Lehrsätzen nachschleppen müfste, wenn man ehrlich verfahren will; und am Ende geschehen könnte, wie in dem eben angeführten Beispiele, dafs, wo die Möglichkeit der Construction im Problem absolut bewiesen werden sollte, statt derselben erst nur ihre Ausführbarkeit nach gewifsen Vorschriften, durch die Möglichkeit der Sache überhaupt bedingt, erwiesen würde.

§. 34. Etwas anders als in §. 29. läfst sich eine Art von Analysis oder Reduction der Aufgabe in Satz II. so vorstellen:

(*Fig.* 20.) Gesetzt, es sey AL die an A zu legende der BC gleiche gerade Linie. Kann man nun zu den zwei Punkten A, B einen dritten D finden, an welchen zwei andere gleiche gerade Linien von A und B aus gehen, indem AL und BC gleiche von diesen Punkten ausgehende gerade Linien sind: so werden alsdann auch die zwei DA, AL zusammen den zweien DB, BC zusammen gleich seyn müfsen.

Diese letztere Gleichheit aber wird sich von dem Punkte D aus in dem Falle bewerkstelligen lassen, wenn so wohl DA und AL, als DB und BC, oder statt der BC eine ihr gleiche BG, in gerader Linie liegen; so dafs die DL der DG gleich werden soll: indem nämlich alsdann die Punkte G und L in der Peripherie eines aus dem Mittelpunkte D mit der Weite DG zu beschreibenden Kreises liegen müfsen; welcher Kreis sich beschreiben läfst, sobald man die Punkte D und G hat; und von der verlängerten DA die DL der DG gleich abschneiden wird.

Nun läfst sich aber der besagte dritte Punkt D zu den zwei gegebenen A und B finden, indem man nämlich die AB zieht, und auf ihr vermöge des Satzes I. ein gleichseitiges Dreieck ADB beschreibt. Denn dadurch werden die DA, DB gleich. Ferner läfst sich eine der BC gleiche CG in gerader Richtung mit der DB an B legen, indem man aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BC einen Kreis beschreibt, der die verlängerte DB in G schneide. Und so läfst sich mithin auch der andere Kreis aus dem Mittelpunkt D mit der Weite DG beschreiben, der von der verlängerten DA (da er die

DA selbst weder in A noch zwischen D und A treffen kann, weil DG gröfser als DB oder DA ist) die DL der DG gleich abschneiden; das ist, die zwei DA, AL zusammen den zweien DB, BG oder DB, BC zusammen gleich machen; und da DA, DB gleich sind, auch die AL der BC gleich machen wird.

§. 35. In den §. 29. gemachten Schlüssen wird die Aufgabe des Satzes II. auf folgende zurückgeführt, von denen immer die Auflösung der folgenden auf der vorhergehenden beruht:

Aufg. A.) (*Fig.* 20.) Es seyen zwei von einem gemeinschaftlichen Endpunkte D ausgehende und einen Winkel mit einander machende gerade Linien DB, BA gegeben, und der einen DB sey an ihrem andern Endpunkt B eine gerade Line BG geradefort angesetzt: man soll der andern DA an ihren andern Endpunkt A eine der letzten BG gleiche geradefort ansetzen.

Aufg. B.) Es seyen zwei gleiche gerade Linien wie vorhin, DB, DA gegeben; und an dem andern Endpunkt B der einen DB liege eine dritte gegebene gerade Linie BC, aber nicht geradefort an der ersten DB: man soll an den andern Endpunkt A der andern DA eine der dritten BC gleiche gerade Linie legen.

Aufg. C.) Es seyen zwei Punkte B, A, und eine gerade Linie BC gegeben, die an einem derselben, B, liegt: man soll an den andern Punkt A eine derselben gegebenen BC gleiche gerade Linien legen. Auflösung durch I, 1. und Aufg. B.

§. 36. Den Aufgaben §. 35. sind folgende analog:

Aufg. a.) (*Fig.* 21.) Es seyen zwei einander gleiche in einem Endpunkte D einen Winkel mit einander einschliefsende gerade Linien DB, DA gegeben, und von der einen derselben DB sey von ihrem andern Endpunkte B aus ein gegebenes Stück BG abgeschnitten: man soll von der andern DA, von ihrem andern Endpunkte A aus, ein diesem gleiches Stück abschneiden.

Aufg. b.) Es seyen zwei einander gleiche gerade Linien wie vorhin, DB, DA gegeben, und an dem andern Endpunkte B der einen DB liege aufserhalb ihr eine dritte gegebene gerade Linie BC, welche kleiner sey als jede der beiden ersten: man soll an den andern Endpunkt A der andern DA eine der dritten BC gleiche gerade Linien legen. Aufl. durch Aufg. a.)

Aufg. c.) Es seyen zwei Punkte B, A, und eine gerade Linie BC gegeben, die an einem derselben, B,

liegt, und kleiner ist als die die gegebenen Punkte verbindende gerade Linie BA: man soll an den andern Punkt A eine derselben gegebenen BC gleiche gerade Linie legen. — Aufl. durch I, 1. und Aufg. b.)

§. 37. Desgleichen folgende:

Aufg. α.) (*Fig.* 22.) Es seyen zwei aus einem gemeinschaftlichen Endpunkte D unter einem Winkel ausgehende gleiche gerade Linien DB, DA gegeben, und die eine DB sey über den gemeinschaftlichen Endpunkt D hinaus verlängert, aber begränzt, bis G: man soll die andere DA über eben denselben Punkt D hinaus dergestalt verlängern, dafs die ganze verlängerte letzte, von ihrem andern Endpunkt A an bis zum Endpunkt ihrer Verlängerung genommen, der ganzen verlängerten ersten BG gleich werde.

Aufg. β.) Es seyen zwei gleiche gerade Linien DB, DA, wie vorhin, gegeben, und an der einen derselben DB und ihrem andern Endpunkte B liege aufserhalb ihr eine dritte gegebene gerade Linie BC, welche gröfser sey als jede der beiden ersten: man soll an den andern Endpunkt A der andern DA eine der dritten BC gleiche gerade Linie legen. — Aufl. durch Aufg. α.)

Aufg. γ.) Es seyen zwei Punkte B, A, und eine gerade Linie BC gegeben, die an einem derselben, B, liegt, und gröfser ist als die die gegebenen Punkte verbindende gerade Linie AB: man soll an den andern Punkt A eine derselben gegebenen BC gleiche gerade Linie legen. Aufl. durch I, 1. und Aufg. β.)

§. 38. Speciellere Aufgaben, die sich durch die im Satz II. gebrauchte oder durch eine der in §. 36. 37. angedeuteten Constructionen auflösen lassen, sind:

1) a) (*Fig.* 23.) Es sey ein gleichschenklichtes Dreieck DAB gegeben, und seine Grundlinie AB über den einen Endpunkt B hinaus um eine gegebene Länge BC verlängert: man soll sie über den andern Endpunkt A hinaus um eine der genannten BC gleiche Länge verlängern.

b) Einer gegebenen geraden Linie AB sey an dem einer Endpunkt B eine andere BC geradefort angesetzt: man soll der ersten an ihrem andern Endpunkt A ebenfalls eine der andern BC gleiche geradefort ansetzen. — Aufl. durch I, 1. und a).

2) α) (*Fig.* 24.) Es sey ein gleichschenklichtes Dreieck DAB gegeben, und von seiner Grundlinie sey von dem einen Endpunkt B an ein gegebenes Stück BC abge-

schnitten: man soll von ihr ein diesem gleiches Stück von ihrem andern Endpunkt A an abschneiden.

β) Es sey eine gerade Linie AB gegeben, und von ihr ein gegebenes Stück BC von ihrem einen Endpunkt B an abgeschnitten: man soll von ihr ein diesem gleiches Stück von dem andern Endpunkt A an abschneiden. — Aufl. durch I, 1. und α.).

§. 39. Anwendungen der Aufgabe in Satz III. kommen im I. B. der Elemente folgende in concreto vor, die wir hier allgemein ausdrücken wollen:

1) „Einer gegebenen geraden Linie eine andere geradefort ansetzen, die einer gegebenen gleich sey." — Wird in I, 20. 22. 43. gebraucht.

Specieller: „Einer gegebenen geraden Linie eine ihr gleiche geradefort ansetzen; oder: die erste verdoppeln." In I, 11.

„Von einer geraden Linie sey ein Stück abgeschnitten, das an einem auf ihr gegebenen Punkte liege: man solle ein diesem gleiches Stück an demselben Punkte auf dessen anderer Seite abschneiden." In I, 11.

„Eine gerade Linie finden, die zweien Seiten eines gegebenen Dreiecks zusammen gleich sey." In I, 20.

„Es sind drei gerade Linien A, B, C gegeben, und ein Punkt D: man soll von diesem aus drei geradefort an einander liegende gerade Linie ziehen, welche den drei gegebenen, je eine einer, gleich seyen." In I, 22.

„Von dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels sey ein gegebenes Stück von der Spitze an abgeschnitten: man soll ein diesem gleiches Stück von dem andern Schenkel von der Spitze an abschneiden." In I, 5.

„Von der gröfsern zweier gegebenen ungleichen Seiten eines Dreiecks ein der kleinern gleiches Stück abschneiden." In 18. 6.

„Von zwei aus einander liegenden Dreiecken ist eine Seite des einen gröfser als eine Seite des andern: man soll von der gröfsern des einen Dreiecks eine der kleinern des andern gleiche abschneiden." In I, 26.

„Eine von einem Winkelpunkt eines Dreiecks gezogene gerade Linie so grofs nehmen, dafs sie einer an demselben Winkelpunkte liegenden Seite des Dreiecks gleich werde." In I, 24.

„Von den zwei Schenkeln eines gegebenen Winkels von dessen Spitze aus gerade Linien abschneiden,

welche zweien gegebenen, je eine einer, gleich seyen." In I, 23.

„Der eine Schenkel eines gegebenen gleichschenklichten Dreiecks ist um eine gegebene Länge unterhalb der Grundlinie verlängert: man soll den andern Schenkel ebenso um die gleiche Länge verlängern." Vgl. I, 5.

„Es sey ein geradlinigter Winkel BAC gegeben: man soll ein Dreieck beschreiben, welches denselben zu einem seiner Winkel, und die denselben einschliefsenden Seiten zweien gegebenen geraden Linien, je eine einer, gleich habe." In I, 23.

„Ein gleichschenklichtes Dreieck mit einem gegebenen Winkel an der Spitze beschreiben, dessen gleiche Schenkel, jeder für sich, einer gegebenen geraden Linie gleich seyen." — Specieller Fall zu I, 23.

§. 40. Weniger bestimmte Aufgaben:

„Es sey eine unbegränzte gerade Linie und auf ihr ein Punkt gegeben: Man soll irgend zwei einander gleiche Stücke derselben von diesem Punkt aus und an beiden Seiten desselben abschneiden." Wird in I, 11. gebraucht.

„Von den zwei Schenkeln eines gegebenen Winkels irgend zwei einander gleiche Stücke von der Spitze an abschneiden." In I, 9.

Zugleich mit Anwendung von I, 1. folgende:

„Es sey eine gerade Linie und auf ihr ein Punkt gegeben: man soll einen Punkt aufserhalb derselben finden, und von ihm aus zwei gerade Linien an die erste ziehen, so dafs diese sowohl selbst einander gleich seyen, als von ihr an beiden Seiten des auf ihr gegebenen Punkts gleiche Stücke abschneiden." In I, 11.

„Innerhalb eines gegebenen Winkels einen Punkt finden, und von demselben aus an die Schenkel des Winkels zwei gerade Linien ziehen, so dafs diese sowohl selbst einander gleich seyen, als von den Schenkeln von der Spitze an gleiche Stücke abschneiden." In I, 9.

§. 41. Auch die Aufgabe I, 22. liefse sich hier schon auflösen; obgleich die derselben beigefügte Determination *Δει δη* etc. auf dem beruht, was erst in I, 20. erwiesen wird. Dieser Umstand, wie auch, dafs von ihr unmittelbar darauf in I, 23. eine Anwendung gemacht wird, welche nicht früher vorkommen kann als nach I, 20., weil sie diesen Satz nothwendig voraussetzt, begründet allerdings eine Schicklichkeit im

System, die Aufgabe I, 22. auch erst nach I, 20. zu setzen; jedoch keine logische Nothwendigkeit. Nur statt des Ausdrucks Δει δη etc. d. h. „Es müfsen aber je zwei zusammen gröfser seyn u. s. w." wäre etwa zu setzen: „von welchen je zwei zusammen gröfser sind u. s. w.," wenn man die Aufg. I, 22. vor I, 20. vortrüge.

Satz IV.

§. 42. Enthält den ersten Lehrsatz der Elemente. Eine Entwicklung eines Beweises, verschiedene andere Ausdrücke, welche sich diesem Lehrsatze geben lassen, und eine Menge von solchen Anwendungen desselben, welche keinen der nachfolgenden Sätze voraussetzen, enthält Haubers Schrift: Scholae logico-mathematicae, in quibus ars cogitandi et eloquendi, inveniendi et demonstrandi, circa unam propositionem, quae est Euclidis Elementorum theorema primum, multis modis et magna exemplorum varietate exercetur. Proponuntur et varia generalia de methodo, et nova quaedam tum ad logicam theoreticam pertinentia, tum de porismatibus in analysi geometrica antiquorum. Pars I. Reutlingae in offic. lit. 1825.; welche als eine Monographie über diesen Satz angesehen werden kann. Wir bemerken hier nur Folgendes:

§. 43. Der Beweis gründet sich auf Ax. 8. und dessen Converse auf gerade Linien und geradlinigte Winkel eingeschränkt: welche oben in nr. 19. der Pfleidererischen Anmerkungen über die Axiome, zweite Klasse, bewiesen worden ist. Ohne diese Converse vorauszusetzen, liefse sich der Beweis auch so darstellen (S. Fig. zu I, 4. in den Uebersetzungen.).

„Wenn man das Dreieck ABC über das Dreieck DEF bringt, und den Punkt A auf den Punkt D, die gerade AB aber auf die gerade DE legt: so wird auch der Punkt B auf den Punkt E fallen, weil die AB der DE gleich ist." Er kann nämlich weder über E hinausfallen; sonst würde die AB eine gerade Linie, welche gröfser als die DE ist, decken, und dieser also gleich seyn (Ax. 8.); folglich wäre sie selbst gröfser als die DE: noch kann er disseits E, zwischen D und E, fallen; sonst würde die AB eine gerade Linie, welche kleiner als die DE ist, decken, und dieser also gleich seyn (Ax. 8.); folglich wäre sie selbst kleiner als die DE; da sie ihr doch nach der Voraussetzung gleich ist.

Nachdem nun aber die AB auf die DE gepafst ist: so wird auch der Punkt C auf den Punkt F fallen. Denn wäre dieses nicht, so fiele der Punkt C entweder gar nicht in die Richtung der DF, sondern innerhalb oder aufserhalb des Winkels EDF: oder er fiele zwar in die Richtung DF, aber auf einen Punkt derselben, der über F hinaus, oder der disseits F läge. Aufserhalb des Winkels DEF aber kann der Punkt C nicht fallen: sonst würde der Winkel BAC einen Winkel, der gröfser als der Winkel DEF ist, decken, jenem also gleich (Ax. 8.), und mithin selbst auch gröfser als der Winkel EDF seyn: Innerhalb des Winkels DEF kann der Punkt C auch nicht fallen: sonst würde der Winkel BAC einen Winkel, der kleiner ist als Winkel EDF, decken, jenem also gleich (Ax. 8.), und mithin ebenfalls kleiner als der Winkel EDF seyn: welches gegen die Voraussetzung ist, wonach er dem Winkel EDF gleich ist. Ferner kann der Punkt C nicht in der Richtung DF über F hinaus fallen: sonst würde die AC eine gerade, die gröfser als die DF ist, decken, und dieser geraden gleich (Ax. 8.), also gröfser als die DF seyn: Auch kann er nicht auf die DF disseits F fallen: sonst würde die AC eine gerade, die kleiner als die DF ist, decken, und ihr gleich (Ax. 8.), also kleiner als die DF seyn: welcher sie doch nach der Vorauss. gleich ist. Es ist also gezeigt worden, dafs der Punkt C auf keinen von allen von dem Punkt F verschiedenen Punkten fallen kann: folglich fällt er auf den Punkt F. Und das übrige, wie im Texte.

§. 44. Der Satz ist, so wie sein Beweis, nicht auf aufser einander liegende Dreiecke eingeschränkt; seine Anwendung kommt häufig bei solchen Dreiecken vor, die eine Seite oder einen Winkel mit einander gemein haben. Man findet die verschiedenen Fälle, welche in der Lage solcher zwei Dreiecke Statt haben, aufgezählt, geordnet, und die einzelnen dafür sich ergebenden Sätze besonders ausgedrückt in Cap. II. u. III. der vorhin angef. Scholae logico-mathematicae: wobei die Beweise solcher Sätze als eben so viele Syllogismen, alle mit einerlei Obersatz (welches eben dieser Satz IV. ist), aber verschiedenen Untersätzen, den Anfängern zur Einprägung des Satzes IV. sowohl, als zur Uebung in dessen Anwendung und im Schliefsen überhaupt dienen sollen.

§. 45. Die Anwendung der letzten Consequenz des Satzes IV. auf gleichschenklichte Dreiecke ergibt:

a) (*Fig.* 25.) Wenn zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DEF ihre Schenkel AB, AC, DE, DF einander gleich, und auch die Winkel an der Spitze, BAC, EAF einander gleich haben: so ist jeder der Winkel an der Grundlinie des einen (Winkel ABC, ACB) jedem (DEF, DFE) an der Grundlinie des andern gleich. Denn da die zwei BA, AC den zweien ED, DE, und der Winkel BAC dem EDF gleich ist: so ist (I, 4.) der Winkel ABC dem DEF, und der Winkel ACB dem DFE gleich. Wiederum da die zwei CA, AB den zweyen ED, DF, und der Winkel CAB dem EDF gleich ist: so ist (I, 4.) der Winkel ACB dem Winkel DEF, und der Winkel ABC dem DFE gleich.

b) Daher sind, unter der nämlichen Voraussetzung, auch die Winkel an der Grundlinie eines jeden einander gleich. Da nämlich jeder der Winkel ABC, ACB dem Winkel DEF gleich ist (nach a): so sind auch die Winkel ABC, ACB einander gleich. Und ebenso läfst sich zeigen, dafs auch die Winkel DEF, DFE einander gleich seyen.

§. 46. Aus den drei Bedingungen des Satzes IV.:
1) AB=DE, 2) AC=DF, 3) Winkel A=D;
und den vier Folgen:
a) BC=EF; b) △ABC=△DEF; c) Winkel B=E; d) Winkel C=F; lassen sich verschiedene Conversen bilden, indem man je zwei Bedingungen mit einer der Folgen zusammengenommen, zur Bedingung eines neuen Satzes macht. Unter diesen sind die Combinationen

I. AB=DE, AC=DF, BC=EF
II. AB=DE, Winkel A=D, Winkel B=E
III. AB=DE, Winkel A=D, Winkel C=F;

diejenige, welche die Bedingungen in den Sätzen I, 8.; I, 26. Thl. 1.; I, 26. Thl. 2.; ausmachen. Von diesen läfst sich aber nur I, 26. Thl. 1. durch den Satz I, 4. ohne weitere Sätze beweisen; wie dieses im Texte jenes Satzes geschieht: die zwei übrigen setzen aufser I, 4. noch andere vorher zu beweisende Sätze voraus.

Hingegen läfst sich hier noch der der Combination

IV. AB=DE, Winkel A=D, △ABC=△DEF,

entsprechende Satz betrachten, welcher auch nichts als I, 4. voraussetzt. Er ist:

§. 47. (*Fig.* 26.) „Wenn zwei gleich grofse Dreiecke ABC, DEF einen Winkel BAC einem Winkel EDF, und von den ihn einschliefsenden Seiten die eine AB der

einen DE gleich haben: so haben sie auch die andere AC der andern DF gleich." Denn wären diese ungleich, also die eine gröfser; es sey AC die gröfsere: so schneide man von ihr die AG der DF gleich ab, und ziehe BG. Da nun die zwei BA, AG der zweien ED, DF gleich sind, und der Winkel BAG den EDF: so ist (I, 4.) auch das Dreieck ABG dem Dreieck DEF gleich. Nach der Vorauss. ist aber das Dreieck ABC dem DEF gleich: folglich wäre das Dreieck ABG dem ABC gleich, der Theil dem Ganzen; welches unmöglich ist. Demnach können die AC, DF nicht ungleich seyn: sie sind also gleich.

§. 48. Die Stellung der Sätze I, 8, 26. dient zum Beispiel, dafs die conversen Sätze nicht immer unmittelbar auf ihre directen folgen: welches bei I, 8. und I, 26. Thl. 2. defswegen nicht geschehen konnte, weil zu ihrem Beweis andere erst noch vorher zu erweisende Sätze gehören; hingegen bei I, 26. Thl. 1. wohl hätte geschehen können, da dieser weiter nichts als I, 4. voraussetzt. Da er aber zu keinem der Sätze I, 5—25. nöthig war, und mit dem zweiten Theil von I, 26. den gröfsten Theil der Bedingungen gemein hat, und daher mit diesem sich füglich in einen Ausdruck verbinden liefs: so hat Euklid vorgezogen, ihn mit diesem in einen Satz zusammen zu nehmen.

§. 49. Wo Euklid im Folgenden den Satz IV. anwendet: führt er die Consequenzen, wie sie in der Aussage des Satzes auf einander folgen, jedesmal so weit an, als sie zum Zwecke nöthig sind. Braucht er nämlich blofs die Gleichheit der Grundlinien: so läfst er die übrige Consequenzen weg, wie im Beweise von I, 10. 24. 25.: Wenn er die Gleichheit der Dreiecke gebraucht; so führt er doch die Gleichheit der Grundlinien mit an, wenn er sie schon nicht nöthig hat, läfst aber die Consequenz von den Winkeln weg, wie in I, 6.: Wenn er aber die Consequenz der Gleichheit der Winkel, auch ohne die der Grundlinien und der Dreiecke, gebraucht: so führt er doch diese mit an, um sich genau an die Aussage des Satzes zu halten; nennt aber alsdenn, wenn er nicht beide Paare braucht, wie in I, 5., nur diejenige Winkel als gleich, die er gerade zu seinem Zwecke nöthig hat; wie in I, 16. 26.

§. 50. Da der Satz I, 6. sich ohne die zweite Consequenz von I, 4., die Gleichheit der Dreiecke betreffend, erweisen läfst, und von derselben sonst keine An-

wendung vor den Sätzen I, 34. 35. gemacht wird: so hätte der Satz von der Gleichheit der Dreiecke, d. i. ihrer Flächen, unter den Bedingungen des Satzes IV., bis dorthin verschoben werden können. Dieses wäre im Sinne derjenigen, welche der Meinung sind, dafs die Gegenstände der Geometrie nach einander nach der Stufenfolge ihrer Zusammensetzung, allemal jeder ganz, abgehandelt werden sollten; also z. B. das, was zwei zusammentreffende gerade Linien betrifft C dahin I, 13. 14. 15. gehören), vor den Dreiecken betrachtet werden sollte, bei den Dreiecken und andern geradlinigten Figuren wiederum, das was ihre Seiten, Umfang und Winkel betrifft, vor dem Raume, den sie einschliefsen u. s. w.; wie man denn diese Methode gröfstentheils von den französchen Mathematikern seit Arnaud befolgt findet (S. Lacroix Betrachtungen vor seiner Geometrie.).

Allein 's Gravesande bemerkt richtig (in seiner Einleitung in die Weltweisheit — übersetzt. Halle 1755. S. 292.): dafs im synthetischen Vortrag die Anordnung nach der Einfachheit oder stufenweise steigenden Zusammensetzung der Materien zwar als Regel zu befolgen sey, jedoch der andern Regel, nach welcher diejenige, die für sich betrachtet werden können, vor denen, die von ihnen abhängen und sie voraussetzen, abgehandelt werden solle, nachstehen und untergeordnet werden müfse. „Wenn ich vorhabe," — sagt er, — „die Anfangsgründe „der Geometrie zu erklären: so ist [nach jener ersten „Regel] die Eintheilung und Ordnung diese: Erstlich „ist von geraden Linien zu handeln, alsdann von den „Dreiecken und den übrigen geradlinigten Figuren, dar„auf von den Cirkeln u. s. w. Aber diese Abhandlung „würde sehr unvollkommen seyn: denn was von den „Parallel- und Perpendicularlinien zu sagen ist, mufs „aus demjenigen hergeleitet werden, was von den Drei„ecken gezeigt wird. Also ist jene Eintheilung zu ver„werfen, ob sie wohl der innern Beschaffenheit der „Sache sehr gemäfs scheint."

Satz V.

§. 51. Der erste Theil dieses Satzes könnte nach der Analogie des nächstfolgenden 6ten so ausgedrückt werden: „Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüber liegenden Winkel gleich." Von dem Raume, der durch das Dreieck

eingeschlossen wird, ist in dem Satze nicht die Rede; und so liefse sich der Satz auch ohne das Wort Dreieck ausdrücken: z. B. „Wenn an die Endpunkte einer geraden Linie, von einem Punkt aufserhalb derselben, gleiche gerade Linien fallen: so machen sie mit der ersteren gleiche Winkel; und wenn sie über diese Endpunkte hinaus verlängert werden: so machen sie mit ihr auch an der andern Seite gleiche Winkel." Oder: „Wenn innerhalb eines Winkels eine gerade Linie gezogen ist, welche von dessen Schenkeln gleiche Stücke abschneidet: so macht sie mit den Schenkeln des Winkels an der einen sowohl als an der andern Seite gleiche Winkel."

§. 52. Das Subject des Satzes steht im Texte in der Mehrzahl: „*Των ισοσκελων τριγωνων.*" Sonsten heifst es mehrmalen im I. Buch im Singular: *Παντος τριγωνου*, und im III. B. *Εαν κυκλου*, *Εαν εν κυκλῳ* u. s. w. Hingegen mit bestimmenden Adjectiven steht auch die Mehrzahl in I, 47. *Εν τοις ορθογωνιους τριγωνοις*; in II, 12. u. 13. *Εν τοις αμβλυγωνιοις τριγωνοις*, *Εν τοις οξυγωνοις τριγωνοις*. So auch in I, 34. *Των παραλληλογραμμων χωριων*. — Der Sinn ist derselbe, wie *Παντος ισοσκελους τριγωνου*. Wie auch die Exposition anfängt: *Εσω τριγωνον ισοσκελες*.

§. 53. Der Beweis läfst sich in drei Theile zerfällen (s. Figur zum Text in der Uebersetzung).

a) Wenn AB=AC ist, und AF, AG gleich gemacht werden, so ist, wenn man BG, CF zieht, die BG=CF, und Winkel ABG=ACF, AGB=AFC (vermöge I, 4.) d. i.: Wenn von der Spitze eines Winkels an, von seinen Schenkeln zwei und zwei, paarweise einander gleiche Stücke abgeschnitten werden, und die Endpunkte der ersten gleichen Stücke eines jeden Schenkels mit den Endpunkten der andern gleichen Stücke des andern Schenkels durch gerade Linien verbunden werden: so sind diese gerade Linien einander gleich, und schliefsen je mit den abgeschnittenen gleichen Stücken gleiche Winkel ein.

b) Zieht man BC: so ist Winkel FBC=GCB, und Winkel FCB=GBC; vermöge abermaliger Anwendung von I, 4. auf das in a) gefundene. D. i.: Unter denselben Voraussetzungen, und wenn die Endpunkte der zwei kleinern abgeschnittenen einander gleichen Stücke durch eine gerade Linie verbunden werden: so schliefst diese mit den zwei Schenkeln des anfänglichen Winkels

an der andern Seite, als an welcher dessen Spitze liegt, gleiche Winkel ein. (Oder die Winkel unter der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks sind einander gleich.)

c) Ferner ist Winkel ABC=ACB: dieſs wird aus den Consequenzen in a) und b) mittelst Ax. 1. gefolgert. D. i, wiederum unter denselben Voraussetzungen schlieſst die letzt gezogene gerade Linie mit den Schenkeln des anfänglichen Winkels auch an derjenigen Seite, an welcher dessen Spitze liegt, gleiche Winkel ein. (Oder die Winkel an der Grundlinie sind einander gleich.)

§. 54. Der erste Theil, die Winkel an der Grundlinie betreffend, läſst sich auch, ohne die gleichen Schenkel zu verlängern, beweisen, indem man (*Fig.* 27, a.) von ihnen irgend zwei gleiche Stücke AD, AE abschneidet, und DE, DC, EB zieht. Man hat alsdenn

a) BE=CD, Winkel ABE=ACD, AEB=ADC; aus I, 4.

b) Die DB=EC, verm. Ax. 3. Da hienach und aus a), die DB, BE den EC, CD gleich sind, und Winkel DBE=ECD: so ist (I, 4.) Winkel BDE=CED.

c) Daher auch Winkel BDC=CEB (als Reste, welche die gleichen CDE, BED von den gleichen ganzen BDE, CED lassen.).

d) Da demnach die BD, DC den CE, EB gleich sind, und Winkel BDC=CEB: so ist auch (I, 4.) Winkel DBC=ECB, d. i. Winkel ABC=ACB.

Diesen Beweis führt Proclus an, und nach ihm andere (s. Chrestom. geom. p. 202. s.). Er ist aber weitläufiger als der Euklidische, und begreift überdieſs die Gleichheit der Winkel unter der Grundlinie nicht in sich, welche zum vollständigen Beweis von I, 7. unentbehrlich ist.

§. 55. Anderer Beweis des 1. Theils vermittelst des Axioms: Wenn zwei Winkel einander ungleich sind: so muſs es auch Winkel geben, deren Gröſse zwischen jene fällt; d. h. welche kleiner sind als der gröſsere von jenen, und gröſser als der kleinere. Dieses gilt von gleichartigen Gröſsen überhaupt; indem dieselbe nicht auf einmal gröſser oder kleiner werden, sondern den Uebergang vom einen zum andern nach dem Gesetze der Continuität durch Mittelstufen machen.

(*Fig.* 27. b.) Es sey nun ABC ein gleichschenklichtes Dreieck, und es seyen, wenn es möglich ist, die Winkel ABC, ACB ungleich, und ABC der gröſsere. So muſs es einen Winkel geben, der kleiner als ABC und

gröfser als ACB ist; es sey ABD ein solcher: so fällt also die BD innerhalb des Winkels ABC; sie begegne der AC in D. Man schneide von der AB, welche der AC gleich, also gröfser als die AD ist, ein der AD gleiches Stück AE ab (I, 3.), und ziehe die EC. So wird nach I, 4. der Winkel ABD dem Winkel ACE gleich seyn, und also kleiner als der Winkel ACB. Er ist aber auch gröfser (Vorauss.): welches unmöglich ist. Folglich können die Winkel ABC, ACB nicht ungleich seyn; sie sind also gleich.

An diesem Beweis ist auszusetzen: dafs, was die Forderung betrifft, zwischen zwei gegebenen ungleichen Winkeln einen dazwischenfallenden zu finden, welche sich in dem Fall, wenn die Winkel ihre Spitze und einen Schenkel gemeinschaftlich hätten, oder wenn man I, 23. voraussetzen dürfte, leicht bewerkstelligen liefse, man dagegen für den Fall, da sie, wie hier, nicht an einerlei Spitze liegen, in dem bisherigen kein Mittel hat, dieselbe zu bewerkstelligen. Nach der Euklidischen Methode aber werden beim Beweis der Lehrsätze nur solche Constructionen zugelassen, welche im Vorhergehenden gezeigt worden sind (vgl. §. 33. und Chrestom. geom. p. 204.)

§. 56. Anderer Beweis des ersten Theils. (*Fig.* 25.) Man stelle sich das nämliche Dreieck ABC noch einmal, oder stelle sich ein anderes, das mit jenem gleiche Schenkel und den Winkel an der Spitze gleich habe, vor; es sey das Dreieck DEF: so folgt der Satz aus §. 45, b. Diesen Beweis mit verschiedenen Wendungen haben mehrere (s. Chrestom. geom. p. 202. s.)

§. 57. Borelli in seinem Euclides restitutus, Pis. 1658. construirt ein dem gleichschenklichten ABC congruentes Dreieck an den Scheitelwinkel von jenes Winkel an der Spitze BAC; nachdem er vorher die Gleichheit zweier Scheitelwinkel ungefähr so dargethan hat: a) Gleicher Winkel Nebenwinkel, welche nämlich die Verlängerung des einen Schenkels von jenen mit dem andern Schenkel einschliefst, sind auch gleich; wie sich ohne I, 13. blofs durch Ax. 8. erweisen läfst. Denn es lassen sich die gleichen Winkel so auf einander legen, dafs je ein Schenkel auf einen fällt; und dann wird auch die Verlängerung des einen Schenkels auf die Verlängerung des andern fallen; mithin die Winkel, welche diese Verlängerung mit den übrigen Schenkeln machen, d. h. die Nebenwinkel der ersten Winkel werden sich

decken und also gleich seyn. Und dieses gilt auch von den Nebenwinkeln eines und desselben Winkels. b) Jede zwei Scheitelwinkel sind aber Nebenwinkel eines und desselben Winkels; mithin sind jede zwei Scheitelwinkel einander gleich.

Dieses vorausgesetzt; sey ABC ein gleichschenklichtes Dreieck. (*Fig.* 28.) Man verlängere seine Schenkel über A hinaus, und mache ihnen ihre Verlängerung AD, AE gleich, und ziehe ED. So wird die Gleichheit der Winkel auf die Art gefolgert, wie §. 45, b. gezeigt worden.

§. 58. Anders läfst sich dieses mit Voraussetzung des Satzes von der Gleichheit der Scheitelwinkel so beweisen. (*Fig.* 29.) Es sey ABC ein gleichschenklichtes Dreieck: man verlängere seine Schenkel beliebig über A hinaus, und nehme die Verlängerungen AD, AE einander gleich; ziehe EB, DC. Da nun die BA, AE den CA, AD gleich sind, und Winkel BAE=CAD als Scheitelwinkel: so ist (I, 4.) BE=CD, und Winkel BEA=CDA. Und da die EA=DA, AC=AB: so ist die ganze EC=DB. Da also die BE, EC den CD, DB gleich sind, und Winkel BEC=CDB (Bew.): so ist auch (I, 4.) der Winkel ECB=DBG, das ist ACB=ABC.

§. 59. Der Beweis des Textes von I, 5. gilt, es mag die Grundlinie BC jedem der Schenkel AB, AC gleich, oder gröfser oder kleiner seyn. Daher gilt der Satz auch vom gleichseitigen Dreieck, in welchem man als Grundlinie betrachten kann, welche man will; mithin sind jede zwei Winkel desselben einander gleich, folglich alle drei einander gleich. Oder: „Ein gleichseitiges Dreieck ist auch gleichwinklicht.“ Nach Def. 25. heifst zwar gleichschenklichtes Dreieck dasjenige, das bloſs zwei Seiten gleich hat (τας δυο μονας ισας εχον πλευρας): in I, 5. aber ist das Wort im weiteren Sinn ohne jene exclusive Bestimmung zu verstehen. So wird auch sonst manchmal Kürze der Aussage eines Satzes durch Weglassung einer leicht zu supplirenden Nebenbestimmung, theils in der Bedingung des Satzes wie in I, 40. 43., theils in der Folge, wie in I, 25., bezweckt. (Vgl. Chrestom. geom. p. 223.)

§. 60. Folgerungen und Anwendungen des S. V. „Wenn in einem Dreieck ABC zwei Winkel ABC, ACB ungleich sind: so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten ungleich.“ Denn wären sie gleich: so wären nach Satz V. auch die genannten Winkel gleich.

§. 61. (*Fig.* 30.) „Wenn an zwei gleiche einen Winkel mit einander machende gerade Linien AB, AC in ihren Endpunkten B, C und innerhalb jenes Winkels gerade Linien BD, CE unter gleichen Winkeln ABD, ACE gezogen sind; und die eine von ihnen, BD, auf den Endpunkt C, aus welchem die andere CE gezogen ist, trifft: so fällt sie mit dieser andern in Eine gerade Linie zusammen." Denn fiele die BD fortgezogen bis C nicht mit der CE zusammen, sondern an die eine oder andere Seite der CE: so wäre der Winkel ACB gröfser oder kleiner als der Winkel ACE: dem Winkel ACE ist aber der Winkel ABC gleich (Vorauss.): folglich wäre der Winkel ACB gröfser oder kleiner als der Winkel ABC. Er ist ihm aber auch gleich (nach I, 5.), weil die AC, AB gleich sind: welches nicht möglich ist. Folglich ist es nicht möglich, dafs die BD nicht mit der CE zusammentreffe: sie trifft also mit ihr zusammen.

§. 62. (*Fig.* 31.) Wenn auf einerlei Grundlinie BC und an einerlei Seite derselben zwei Dreiecke ABC, DBC stehen: so lassen sich im Allgemeinen folgende drei Arten gedenken, wie dieselbe in Beziehung gegen einander liegen können.

a) (*Fig.* 31, a.) Entweder schneiden sie einander (oder ihre Perimeter schneiden einander; oder ein Schenkel des einen schneidet einen Schenkel des andern, so dafs das übrige Paar Schenkel an verschiedenen Seiten (ad diversas partes) des einander schneidenden Paars liegen). Alsdenn ist ein Winkel an der Grundlinie des zweiten (bei B) ein Theil eines Winkels an der Grundlinie des ersten, und der übrige Winkel an der Grundlinie des ersten (bei C) ein Theil des übrigen Winkels an der Grundlinie des zweiten. Die beiden Dreiecke haben ein Stück gemeinschaftlich. Die Spitze eines jeden Dreiecks liegt aufserhalb des andern; und die die Spitzen beider verbindende gerade Linie AD liegt aufserhalb der beiden Dreiecke, und begegnet der Grundlinie BC selber nicht: dafs sie verlängert der verlängerten Grundlinie begegne, ist ein möglicher Fall, aber nicht nothwendig.

b) (*Fig.* 31, b.) Oder das eine (DBC) liegt innerhalb des andern (ABC), ist von dem andern eingeschlossen, ist ein Theil des andern; und zwar so, dafs die Spitze (D) des ersten auf einem der Schenkel (AB) des andern liegt. In diesem Fall ist ein Schenkel des andern ein Theil eines Schenkels des ersten; und die die Spi-

tzen beider verbindende gerade Linie ist dessen übriger Theil; diese Linie trifft also in diesem Fall in ihrer Verlängerung auf den einen Endpunkt der Grundlinie. Den einen Winkel an der Grundlinie (bei B) haben sie gemeinschaftlich; und der andere Winkel an der Grundlinie (bei C) des eingeschlossenen ist ein Theil des andern Winkels an der Grundlinie des einschliefsenden.

c) (*Fig.* 31, c.) Oder das eine liegt wiederum innerhalb des andern, ist von demselben eingeschlossen, ist ein Theil desselben; aber so, dafs die Spitze (D) des ersten innerhalb des andern liegt. In diesem Fall begegnet jeder Schenkel des eingeschlossenen, über seine Spitze hinaus verlängert, einem Schenkel des einschliefsenden; und je einer seiner Winkel an der Grundlinie ist ein Theil eines der Winkel an der Grundlinie des einschliefsenden. Die die Spitzen verbindende gerade Linie AD fällt innerhalb des einschliefsenden Dreiecks, und trifft einwärts verlängert die Grundlinie (BC) zwischen ihren Endpunkten.

Es fragt sich nun: Ob alle, oder welche von diesen drei Arten in dem Fall, wenn beide Dreiecke gleichschenklicht sind, Statt haben können, oder nicht? Es sey also

Frage 1.: Ist es möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einerlei Grundlinie und an einerlei Seite derselben ihre Spitzen in einer, durch einen der Endpunkte der Grundlinie gehenden geraden Linie haben?

(*Fig.* 31, b.) Es seyen, wenns möglich ist, zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DBC auf einerlei Grundlinie BC und an einerlei Seite derselben, und die ihre Spitzen A, D in einer durch einen der Endpunkte C der Grundlinie gehenden geraden Linie AC haben. So ist im gleichschenklichten Dreieck ABC der Winkel ABC dem ACB gleich (I, 5.). Ebenso ist im gleichschenklichten Dreieck DBC der Winkel DBC dem DCB gleich (I, 5.). Also wären die Winkel ABC, DBC, jeder dem nämlichen Winkel ACB gleich, und folglich die Winkel ABC, DBC einander gleich (Ax. 1.), das Ganze und der Theil: welches nicht möglich ist (Ax. 9.). Folglich ist es nicht möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke u. s. w.

Anderer Ausdruck: „Auf Einer Grundlinie können nicht zwei gleichschenklichte, einen Winkel an der Grundlinie gemein habende Dreiecke stehen." Ferner: „Wenn zwei gleichschenklichte Dreiecke auf der nämlichen Grundlinie und an einerlei Seite derselben ste-

hen: so kann die gerade Linie, die ihre Spitzen verbindet, nicht mit einem der Schenkel zusammen fallen;" oder „es kann nicht ein Schenkel des einen und ein Schenkel des andern in einer geraden Linie liegen." Oder: „Keiner von allen Punkten, die auf einem der Schenkel eines gleichschenklichten Dreiecks, oder auf seiner Verlängerung über die Spitze hinaus, angenommen werden können, kann Spitze eines andern auf der nämlichen Grundlinie stehenden gleichschenklichten Dreiecks werden." Oder: „Von allen geraden Linien, welche sich von einem Endpunkt der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks an den gegenüberliegenden Schenkel, oder an dessen Verlängerung über die Spitze hinaus, ziehen lassen, kann keine von diesem Schenkel ein ihr selber gleiches Stück zwischen ihr und dem andern Endpunkt der Grundlinie abschneiden." Oder: „Von jedem auf einem Schenkel eines gleichschenklichten Dreiecks oder auf dessen Verlängerung über der Spitze hinaus angenommenen Punkte gehen an die beiden Endpunkte der Grundlinie ungleiche gerade Linien."

§. 63. Frage 2.: Ist es möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einerlei Grundlinie und an einerlei Seite derselben ihre Spitzen in einer aufserhalb der beiden Dreiecke liegenden geraden Linie haben?

(*Fig.* 31, a.) Es seyen, wenns möglich ist, zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DBC auf einerlei Grundlinie BC und an einerlei Seite derselben, die ihre Spitzen A, D in einer aufserhalb der beiden Dreiecke fallenden geraden Linie AD haben. Da ABC ein gleichschenklichtes Dreieck ist; so ist der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich (I, 5.), und folglich kleiner als der Winkel DCB. Wiederum da DBC ein gleichschenklichtes Dreieck ist, so ist der Winkel DBC dem DCB gleich (I, 5.), und folglich der Winkel ABC gröfser als der Winkel DCB. Er ist aber auch kleiner, wie gezeigt worden: welches sich widerspricht. Demnach ist es nicht möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke u. s. w.

Anderer Ausdruck: „Auf einerlei Grundlinie und an einerlei Seite derselben lassen sich nicht zwei gleichschenklichte Dreiecke errichten, von welchen die Spitze eines jeden aufserhalb des andern fiele." Oder: „Zwei gleichschenklichte Dreiecke auf derselben Grundlinie und an einerlei Seite derselben können ihre Spitzen nicht, jedes aufserhalb des andern, haben." Oder: „Auf

Einer Grundlinie und an einerlei Seiten können nicht zwei einander schneidende gleichschenklichte Dreiecke stehen;" oder „nicht zwei gleichschenklichte Dreiecke stehen, deren Perimeter einander schneiden." Oder: „Wenn auf einerlei Grundlinie u. a. e. S. zwei gleichschenklichte Dreiecke stehen; so kann nicht ein Schenkel des einen unverlängert einen Schenkel des andern schneiden." Auch: „Wenn auf Einer Grundlinie u. a. e. S. zwei Dreiecke stehen, von welchen eine Seite des einen eine Seite des andern schneidet; so können sie nicht beide gleichschenklicht seyn."

§. 64. Aus §. 62. u. 63. folgt: „Wenn zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einerlei Grundlinie und an einerlei Seite derselben liegen: so fällt die gerade Linie, die ihre Spitzen verbindet, ganz innerhalb des einen Dreiecks." Denn wäre dieses nicht: so fiele sie entweder aufserhalb der beiden Dreiecke, oder mit einem Schenkel zusammen. Sie kann aber nicht aufserhalb der beiden Dreiecke fallen (§. 63.); auch nicht mit einem Schenkel zusammenfallen (§. 63.): folglich mufs sie innerhalb des einen Dreiecks fallen.

Oder: „Das eine der beiden Dreiecke ist innerhalb des andern eingeschlossen." Und statt zweier gleichschenklichten, könne es auch ein gleichseitiges und ein gleichschenklichtes seyn. So steht der Satz in Chrestom. geom. p. 325. — Oder: „Die Spitze des einen fällt innerhalb des andern." Ferner: „Die die Spitzen verbindende gerade trifft verlängert die Grundlinie zwischen ihren Endpunkten."

§. 65. (*Fig.* 32.) Wenn auf einerlei Grundlinie BC und an verschiedenen Seiten derselben zwei Dreiecke ABC, DBC stehen; und man die zwei Schenkel AB, AC der einen über die Grundlinie BC hinaus nach E, F verlängert: so lassen sich im Allgemeinen drei Arten gedenken, wie das zweite in Beziehung auf das erste fallen kann:

a) (*Fig.* 32, a.) Entweder fällt des zweiten Spitze D aufserhalb des Winkels EAF; also einer seiner Schenkel (DC) schneidet die Verlängerung (BC) eines der Schenkel (AB) des ersten. Bei dem einen Endpunkte (B) der Grundlinie ist ein Winkel unter der Grundlinie des ersten (der EBC) ein Theil des Winkels an der Grundlinie des zweiten (des DBC); und beim andern Endpunkte (C) ist der Winkel an der Grundlinie des zweiten (der DCB) ein Theil des Winkels unter der

Grundlinie des ersten (des Winkels BCF). Die ihre Spitzen verbindende gerade Linie (AD) fällt aufserhalb der beiden Dreiecke, und begegnet der Grundlinie BC selber nicht, sondern ihrer Verlängerung (über B hinaus).

b) (*Fig.* 32, b.) Oder des zweiten Spitze D fällt auf die Verlängerung eines Schenkels des ersten (man setze des Schenkels AB). In diesem Fall ist die die Spitzen beider verbindende gerade Linie (AD) einer der Schenkel des ersten verlängert: und bei B ist der Winkel an der Grundlinie des zweiten Dreiecks einerlei mit dem Winkel unter der Grundlinie des ersten Dreiecks; bei C ist der übrige Winkel an der Grundlinie des zweiten ein Theil des übrigen Winkels unter der Grundlinie des ersten.

c) (*Fig.* 32, c.) Oder des zweiten Spitze D fällt innerhalb des Winkels EAF. Alsdann fällt die ihre Spitzen verbindende gerade Linie AD innerhalb eines jeden der beiden Dreiecke, und schneidet die Grundlinie BC zwischen ihren Endpunkten. Und bei jedem der beiden Endpunkte B, C der Grundlinie ist der Winkel an der Grundlinie des zweiten Dreiecks ein Theil des Winkels unter der Grundlinie des ersten.

Es fragt sich nun: ob alle, oder welche von diesen Arten, in dem Fall, wenn beide Dreiecke gleichschenklicht sind, Statt haben können oder nicht? Es sey also

Frage 1.: Ist es möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einerlei Grundlinie und an verschiedenen Seiten derselben ihre Spitzen in einer durch einen der Endpunkte der Grundlinien gehenden geraden Linie haben?

(*Fig.* 33.) Es seyen, wenns möglich ist, auf einer Grundlinie BC und an verschiedenen Seiten derselben zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DBC, welche ihre Spitzen in einer durch den einen der Endpunkte B der Grundlinie gehenden geraden Linie haben. Und man verlängere die AC nach E. Da nun das Dreieck ABC gleichschenklicht ist, und die gleichen AB, AC nach D, E verlängert sind: so sind (I, 5.) die Winkel unter der Grundlinie gleich, d. i. der Winkel DBC dem Winkel BCE gleich. Wiederum, da das Dreieck DBC gleichschenklicht ist, so sind (I, 5.) die Winkel an der Grundlinie desselben gleich, d. i. der Winkel DBC dem Winkel DCB. Mithin wäre der Winkel DBC jedem der Winkel ECB, DCB gleich, und also diese zwei letzeren

einander gleich, Ganzes und Theil: welches unmöglich ist. Folglich ist es nicht möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke u. s. w.

Anderer Ausdruck: „Auf einerlei Grundlinie können nicht zwei gleichschenklichte Dreiecke Nebenwinkel zu Winkeln an der Grundlinie haben." Ferner: „Bei gleichschenklichten Dreiecken auf einerlei Grundlinie und an verschiedenen Seiten derselben kann nicht ein Schenkel des einen und des andern geradefort aneinander liegen u. dgl."

§. 66. Frage 2.: Ist es möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einer Grundlinie und an verschiedenen Seiten derselben ihre Spitzen in einer aufserhalb der beiden Dreiecke liegenden geraden Linie haben?

(*Fig.* 34.) Es seyen, wenns möglich ist, auf einerlei Grundlinie BC und an verschiedenen Seiten derselben zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DBC, welche ihre Spitzen A, D in einer aufserhalb der beiden Dreiecke liegenden geraden Linie AD haben. So machen AB und BD einen Winkel mit einander, und wenn man die AB verlängert, so wird die Verlängerung BE innerhalb des Winkels DBC fallen; man verlängere auch die AC nach F. Da nun die AB, AC gleich, und nach E, F verlängert sind; so sind die Winkel EBC, BCF gleich (I, 5. Thl. 2.), und folglich der Winkel EBC gröfser als der Winkel ECB. Wiederum da die DB, DC gleich sind: so sind (I, 5. Thl. 1.) die Winkel DBC, DCB gleich: mithin der Winkel EBC kleiner als der Winkel ECB. Er ist aber auch gröfser bewiesen worden: welches sich widerspricht. Folglich ist es nicht möglich, dafs zwei gleichschenklichte Dreiecke u. s. w.

Anderer Ausdruck: „Die Spitze des einen liegt nicht aufserhalb des von den verlängerten Schenkeln des andern an dessen Spitze eingeschlossenen Winkels;" u. a.

§. 67. a. Aus §. 65. und 66. folgt: „Wenn zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einerlei Grundlinie und an verschiedenen Seiten derselben liegen: so fällt die gerade Linie, die ihre Spitzen verbindet, ganz innerhalb der beiden Dreiecke." — Vgl. Chrestom. geom. S. 324. und Proclus Bemerkungen zum Beweis von I, 9., welche mit §. 65. 66. auf eines hinauslaufen. Ebendas. S. 238. f.

Anderer Ausdruck: Die Spitze des einen liegt innerhalb des Winkels an der Spitze des andern (sofern

man des letztern Schenkel verlängert gedenkt). Ferner „die die Spitzen verbindende gerade Linie schneidet die gemeinschaftliche Grundlinie zwischen ihren Endpunkten."

Daher auch „Wenn aus den zwei Endpunkten A, B eine gerade Linie AB (Fig. zu I, 1.) als Mittelpunkten, mit der Weite je vom einen zum andern, Kreise beschrieben werden, welche einander schneiden werden: so wird die von einem Durchschnittspunkte C zum andern D gezogene gerade Linie CD die erstere gerade Linie AB zwischen ihren Endpunkten schneiden." Denn diese Durchschnittspunkte sind Spitzen zweier gleichseitigen Dreiecke auf der gemeinschaftlichen Grundlinie AB.

b) Aus §§. 63. u. 66. zusammengenommen folgt: Auf einerlei Grundlinie können nicht, weder an einerlei noch an verschiedenen Seiten, zwei gleichschenklichte Dreiecke dergestalt stehen, dafs die ihre Spitzen verbindende gerade Linie aufserhalb der beiden Dreiecke falle.

§. 68. (*Fig.* 35, a. b.) Wenn auf einer geraden Linie BC an einerlei oder an verschiedenen Seiten derselben gleichschenklichte Dreiecke ABC, DBC stehen: so schliefsen die Schenkel AB, AC des einen mit den Schenkeln DB, DC des andern an den Endpunkten der Grundlinie B, C gleiche Winkel ABD, ACD ein. — Folgt aus I, 5. u. Ax. 2. oder 3.

§. 69. Folgerungen und Anwendungen von I, 5. in Verbindung mit I, 4. (*Fig.* 36.) „Wenn an die Grundlinie BC eines gleichschenklichten Dreiecks ABC in beiden Endpunkten B, C gleiche gerade Linien BD, CE geradefort angesetzt, und deren Endpunkte D, E mit der Spitze A durch gerade Linien AD, AE verbunden werden: so sind diese einander gleich, und schliefsen mit jeden zwei Schenkeln des Dreiecks gleiche Winkel ein; nämlich die Winkel DAB und EAC gleich, und die Winkel DAC, EAB gleich."

Denn da die DB = CE: so ist, wenn man die gemeinschaftliche BC hinzufügt, die CD = BE. Also sind die zwei AC, CD den zweien AB, BE gleich; aber auch der Winkel ACD = ABE (I, 5.): folglich (I, 4.) AD = AE, und Winkel CAD = BAE; daher, wenn man den gemeinschaftlichen Winkel BAC wegnimmt, Winkel BAD = CAE.

§. 70. (*Fig.* 37.) „Wenn von der Grundlinie BC eines gleichschenklichen Dreiecks ABC von deren End-

punkten B, C an gleiche Stücke BD, CE abgeschnitten, und an deren Endpunkte D, E von der Spitze A gerade Linien AD, AE gezogen werden: so sind diese einander gleich, und schliefsen mit jeden zwei gleichen Schenkeln gleiche Winkel ein; auch schliefsen sie mit diesen und den Stücken BD, CE der Grundlinie gleiche Dreiecke ein."

Wird auf ähnliche Art bewiesen, wie §. 69.

§. 71. (*Fig.* 38.) Wenn von der Spitze A eines gleichschenklichten Dreiecks ABC gerade Linien an die Grundlinie gezogen werden: so halbirt diejenige von ihnen, AD, welche die Grundlinie BC halbirt, auch den Winkel an der Spitze und das Dreieck; eine solche aber, AE, die die Grundlinie in zwei ungleiche Theile theilt, theilt auch den Winkel an der Spitze und das Dreieck in ungleiche Theile, und der gröfsere Theil liegt an der Seite des gröfsern Abschnitts BE der Grundlinie.

Bew. 1.) Da die zwei AB, BD den zweien AC, CD, und auch (I, 5.) der Winkel ABD dem ACD gleich ist: so ist auch (I, 4.) Dreieck ABD= Dreieck ACD, und Winkel BAD=CAD.

2) Es sey die BE>CE; und man schneide von der gröfsern BE ein der kleinern CE gleiches Stück BF ab; und ziehe AF. So ist nach dem vorherg. (§. 70.) Winkel BAF=CAE, mithin Winkel BAE>CAE. Und ebenso wird gezeigt, dafs auch Dreieck BAE>CAE.

§. 72. „Wenn eine von der Spitze A eines gleichschenklichten Dreiecks ABC gezogene gerade Linie den Winkel an der Spitze oder das Dreieck halbirt: so halbirt sie auch die Grundlinie. Und wenn sie den Winkel an der Spitze oder das Dreieck in ungleiche Theile theilt; so theilt sie auch die Grundlinie in ungleiche Theile, und der gröfsere Theil von ihr liegt an der nämlichen Seite mit dem gröfsern Theil des Winkels an der Spitze oder des Dreiecks.

Bew. 1) Die AD halbire den Winkel BAC, oder das Dreieck ABC. Theilte sie nun die Grundlinie nicht in gleiche Theile: so würde sie (nach §. 71.) auch den Winkel BAC und das Dreieck ABC in ungleiche Theile theilen.

2) Die AE theile den Winkel BAC oder das Dreieck ABC in ungleiche Theile, so dafs der Winkel BAE oder das Dreieck ABE der gröfsere Theil sey. Theilte sie nun nicht die Grundlinie in ungleiche Theile, so dafs BE >EC: so wäre entweder BE=EC oder BE< EC.

Aber BE ist nicht =EC; sonst wäre auch Winkel BAE und Dreieck ABE die Hälfte des Ganzen (§. 71.). Auch ist nicht BE<EC; sonst wäre auch Winkel oder Dreieck BAE<CAE (§. 71.); welches gegen die Voraus. ist. Folglich u. s. w.

§. 73. Aufgaben. (*Fig.* 36.) 1) Von der Spitze A eines gegebenen gleichschenklichten Dreiecks sey eine gerade Linie AD an die Verlängerung der Grundlinie gezogen: man soll ebenfalls von der Spitze A eine jener gleiche an die an der andern Seite verlängerte Grundlinie ziehen. — Aufl. Man mache die Verlängerung CE=BD, und ziehe AE: so ist diese =AD (§. 69.).

2) (*Fig.* 37.) Von der Spitze A eines gleichschenklichten Dreiecks ABC sey eine gerade Linie AE an die Grundlinie gezogen, welche diese nicht halbire: so läfst sich eine andere ihr gleiche von der Spitze aus an die Grundlinie ziehen. — Aufl. Man schneide von der gröfsern BE eine der kleinern CE gleiche, die BF ab: so ist AF die verlangte (§. 70.).

3) (*Fig.* 39.) Aus der Spitze A eines gegebenen Winkels BAC sey eine gerade Linie AD gezogen: man soll an sie einen dem gegebenen BAC gleichen Winkel an der nämlichen Spitze A anlegen.

I. Fall; die AD sey aufserhalb des Winkels BAC gezogen. Man schneide die AB, AD einander gleich ab, und ziehe BD, welche die AC in C schneide. Ist nun der Winkel CAD dem Winkel BAC gleich: so ist geschehen, was verlangt wurde; nämlich an die AD in A ein dem Winkel BAC gleicher Winkel CAD angelegt. Ist aber der Winkel CAD>BAC: so ist auch CD>BC (§. 72.). Man schneide von CD die DE=BC ab, und ziehe AE: so ist auch der Winkel DAE=BAC (§. 69.), also das Verlangte geschehen. Und auf ähnliche Art verfährt man, wenn der Winkel CAD<BAC ist.

II. Fall; die AD sey innerhalb des Winkels BAC gezogen. Dieser Fall wird sich auf den vorigen reduciren lassen, indem man den gemeinschaftlichen Theil des gegebenen und des anzulegenden hinwegnimmt.

§. 74. Andere Anwendungen von I, 5., theils allein, theils in Verbindung mit I, 4., finden sich in der Chrestom. geom. S. 324. 325. 329. 333. f. 337. 346. 347. f. 385. f.

Satz VI.

§. 75. Ist Converse des ersten Theils des fünften Satzes. Der zunächst durch die Conversion sich ergebende Ausdruck wäre: „Wenn ein Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich hat: so ist es gleichschenklicht." Diese Aussage hätte jedoch einige Unbequemlichkeit für die Anwendung, sofern der Beisatz „an der Grundlinie" eine gewisse weitere Bestimmung in der Bedingung zweier gleicher Winkel zu involviren, und zu erfordern scheinen könnte, dafs man erst wissen müfste, ob denn die Seite, an welcher die gleichen Winkel liegen, auch für die Grundlinie genommen werden könne. Diese Unbequemlichkeit fällt weg bei dem Gebrauch des Worts Grundlinie in solchen Fällen, wo schon vorher zwei Seiten genannt waren, zwischen denen und der dritten durch die Bedingungen oder in den Folgen ein Unterschied gemacht wird; wie dieses in I, 4. I, 5. und I, 8. geschieht: wogegen Euklid in den Bedingungen von I, 21. u. I, 26., und in dem Prädicat von I, 20. das Wort Grundlinie nicht gebraucht.

Man müfste also das Wort Grundlinie in der oben nach I, 5. geformten Aussage aus der Bedingung weglassen, und es in die Folge nehmen; nämlich: „Wenn zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich sind: so ist es ein gleichschenklichtes, dessen Grundlinie an den gleichen Winkeln liegt": Dafür es einfacher lautet: „so sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich."

Mit Umgehung des Worts Dreieck würde der Ausdruck weitläufiger: z. B. „Wenn zwei an die Endpunkte einer geraden Linie von einem Punkt aufserhalb derselben gezogene gerade Linien gleiche Winkel mit ihr machen: so sind sie einander gleich." Oder: „Wenn an eine gerade Linie in ihren Endpunkten und an einerlei Seite zwei gerade Linien unter gleichen Winkeln gezogen sind, und in einem gemeinschaftlichen Endpunkt zusammentreffen: so sind sie einander gleich."

§. 76. Der Beweis des Textes thut dar: Wenn die zwei Seiten AB, AC ungleich sind: so können die ihnen gegenüberliegenden Winkel nicht gleich seyn. Oder mit andern Worten: „In einem ungleichschenklichten Dreiecke sind auch die Winkel an der Grundlinie ungleich;" welches der Gegensatz von I, 5. ist. Dieses vorausgesetzt; folgt: wenn die Winkel ABC, ACB gleich sind:

so sind auch die Seiten AB, AC gleich: Denn wären sie ungleich, so würden auch die Winkel ABC, ACB ungleich seyn.

§. 77. Allgemein: Wenn man eines vorgelegten Satzes Gegensatz beweisen kann, d. h. den Satz, der ausspricht, dafs demjenigen, dem der Begriff des Subjects des ersten Satzes nicht zukommt, auch sein Prädicat nicht zukommen könne: so folgt daraus die Wahrheit der Converse des ersten Satzes. Es sey der Satz: Allem, was A ist, kommt B zu; und dessen Gegensatz bewiesen, nämlich: Allem, was nicht A ist, kann B nicht zukommen: so wird folgen: Allem, was B ist, kommt A zu; die Converse des ersten Satzes. Denn gäbe es ein B, dem A nicht zukäme: so gäbe es eben damit etwas, das nicht A ist, und dem doch B zukäme: welches demjenigen widerspricht, was als bewiesen vorausgesetzt wurde.

§. 78. Umgekehrt: Wenn eines Satzes Converse gilt, so gilt auch dessen Gegensatz, d. h. derjenige Satz, der andern, von des erstern Subjecte verschiedenen, Subjecten dessen Prädicat abspricht: wodurch also dieses Prädicat, das vermöge des ersten Satzes dessen Subjecte allgemein zukommt, diesem Subjecte auch ausschliefslich zuerkannt wird. So in Betreff des Satzes V.: da es von allen gleichschenklichten Dreiecken gilt, dafs sie die Winkel an der Grundlinie gleich haben: so kann jedoch die Frage seyn: ob dasselbe nicht auch von andern als gleichschenklichten Dreiecken gelten könne? Diese Frage wird nun durch Satz VI. verneinend entschieden, welcher lehrt, dafs, wo die Gleichheit der Winkel Statt hat, auch die Gleichheit der Schenkel Statt haben müfse, also das Ungleichschenklichtseyn ausgeschlossen werde. Es gilt mithin nicht nur allgemein: Alle gleichschenklichte Dreiecke haben die Winkel an der Grundlinie gleich, vermöge S. V.; sondern es gilt auch ausschliefslich: Nur sie, und keine andere, vermöge S. VI.

§. 79. Im Gegentheil: wenn das Prädicat, das dem Subjecte eines Satzes beigelegt wird, auch noch andern von ihm verschiedenen Subjecten, oder solchen zukommt, denen der Begriff des Subjects jenes Satzes nicht zukommt: so läfst sich der Satz nicht umkehren, oder seine Converse gibt keinen wahren Satz. Wenn zwar allen A zukommt, dafs sie B seyen, aber auch noch andern Subjecten, die nicht A sind: so ist es nicht richtig, dafs allen B auch A zukomme. Der Fall kommt nun in der Geometrie so gut, als anderswo, vor, dafs man Sätze

vorträgt, die einem Subject etwas beilegen, das auch noch andern Subjecten zukommt; z. B. einer einzelnen Art, was der ganzen Gattung oder wenigstens mehreren andern Arten auch zukommt: entweder weil man es dermalen nur für die einzelne Art nöthig hat, oder weil man es vor der Hand nur von ihr allein, und noch nicht von den andern, beweisen kann. Daher auch in der Geometrie nicht alle Sätze, wie Pelletier gemeint hat, sich convertiren lassen, oder auch umgekehrt wahr sind. Z. B. „Ein gleichseitiges Dreieck hat die Winkel an der Grundlinie gleich;" ist ein wahrer Satz, sofern man sich irgend eine Seite desselben als Grundlinie vorstellt: der umgekehrte aber: „Jedes Dreieck, das die Winkel an der Grundlinie gleich hat, ist auch gleichseitig," ist nicht wahr. „Zwei Dreiecke, die die Grundlinie der Grundlinie, und die zwei Seiten den zwei Seiten gleich haben, sind gleich gros;" ist wahr: das Umgekehrte: „Gleiche Dreiecke auf gleichen Grundlinien haben auch die zwei Seiten den zwei Seiten gleich," ist nicht wahr. „Dreiecke, die zwei Winkel und die daran liegende Seite gleich haben, haben auch den dritten Winkel gleich;" ist wahr: aber „Dreiecke, die die zwei Winkel und auch den dritten gleich haben, haben auch die an den zwei ersten Winkeln liegenden Seiten gleich," ist nicht wahr.

§. 80. Der directe Satz I, 5. und der converse I, 6. sind beide durch I, 4., von einander unabhängig, bewiesen. In sofern könnte man den leztern dem erstern voranschicken; und dann hiefse jener der directe, dieser der converse. Bei Proclus heifst, was hier der directe, προηγουμενη, der vorangehende; die Converse αντιστροφος. Dafs Euklid den 5ten voranschickt, geschah ohne Zweifel, weil er ihn als denjenigen, von welchem gleich darauf noch weiter öfters im ersten Buch Anwendungen gemacht werden, statt dafs der 6te im ganzen ersten Buch nicht mehr gebraucht wird, für geeigneter hielt, als Hauptsatz unter diesen beiden angesehen zu werden.

§. 81. Der converse Satz wird, wie hier, so in vielen andern Fällen am schicklichsten gleich hinter dem directen gesetzt. Dafs dieses nicht immer geschehe, entweder weil der converse zu seinem Beweis noch anderer erst noch vorher zu erweisender Sätze bedarf, oder aus andern Gründen, davon geben ein Beispiel die Sätze I, 8. 26. in Beziehung auf I, 4. als directen, wie §. 46. 48. bemerkt worden; so wie auch davon, dafs nicht alle Conversen, wenn sie auch wahr sind, beson-

ders aufgeführt werden, ein Beispiel ebendaselbst §. 46. 47. sich findet.

§. 82. In der Art, die Conversen zu beweisen, finden mancherlei Verschiedenheiten Statt. Der §. 76. 77. bemerkte Fall, dafs die Converse eines Satzes vermittelst seines Gegensatzes erwiesen wird, ist nur einer von vielen; und in diesem Fall erhält der Beweis der Converse die apagogische Form. Ebenso der §. 80. bemerkte Fall, dafs der directe Satz und der converse vermittelst einerlei Hauptsatzes bewiesen werden, und namentlich, wie dort, der eine durch die directe, der andere durch die apagogische Beweisart. In vielen Fällen ist der Beweis der Converse von dem directen Satz abhängig; und der Beweis kann dann wieder entweder direct oder apagogisch seyn. Pfleiderer hat die verschiedenen Arten, Conversen zu beweisen, welche in den Elementen vorkommen, in folgende Uebersicht zusammengestellt.

A) Directer und umgekehrter Satz unabhängig von einander bewiesen

I. mittelst eines nämlichen Hauptsatzes
1) jener direct, dieser apagogisch; in I, 5. 6.
2) jener apagogisch, dieser direct; in III, 1. Zus. und III, 3. 1. Th.

II. beide direct
1) mittelst einerlei Hauptsätze; verbunden
a) mit Axiomen, deren eines die Converse des andern ist; und III, 14.
b) mit Theoremen, deren eines das umgekehrte des andern ist; in VI, 2. 3. 14. 15. XI, 34. XII, 15.
2) mittelst Sätze, deren einer die Converse des andern ist; in III, 1. Zus. 3. 28. 29.

III. beide apagogisch
mittelst einerlei Hauptsatzes, und zweier Sätze, deren einer der Gegensatz des andern ist; in III, 16. 18.

B) Conversen bewiesen abhängig von den directen Sätzen

I. unmittelbar
1) apagogisch; mittelst
a) Ax. 9. in I, 14. 39. 40. 26. 1 Th. III, 19. 27.
b) anderer Theoreme; in I, 26. 2 Th. VI, 7. 26.
c) der Gegensätze von den direrecten; in I, 19. 25.

2) direct; mit Zuziehung
a) anderer Theoreme; in I, 48. III, 37. VI, 22.
b) der Conversen eines dem directen analogen Satzes; in VI, 5. 6.

II. mittelbar; in I, 8. 4.

Andere Bemerkungen über die Conversion der Sätze findet man bei Proclus u. a. S. Chrestom. geom. p. 205—210., Camerer Euclid. Elem. Tom. I. p. 51. s., Hauber Scholae logico-mathem. Cap. V.

§. 83. Der Beweis des Satzes VI. im Texte ist indirect, und läuft darauf hinaus: Wenn die Seiten AB, AC ungleich wären (s. die Fig. in d. Uebers.), indem die Winkel ABC, ACB gleich sind: so würden zwei Dreiecke einander gleich seyn, von denen eines ein Theil des andern ist; welches nicht möglich ist: Folglich können die Seiten AB, AC nicht ungleich seyn. — Dafs aber jene Dreiecke gleich wären, wird durch I, 4. aus der Bedingung und Construction geschlossen.

Der Beweis läfst sich auch darauf bringen: a) dafs zwei Winkel einander gleich wären, deren einer ein Theil vom andern ist; oder b) dafs die zwei Winkel einander ungleich wären, die nach der Vorauss. gleich sind.

Nämlich zu a): Aus den im Texte gebrauchten Prämissen folgt weiter verm. I, 4.: „der Winkel DCB ist dem Winkel ABC gleich. Aber der Winkel ACB ist dem Winkel ABC gleich, nach der Vorauss. Folglich ist auch der Winkel DCB dem Winkel ACB gleich, ein Theil dem Ganzen;" u. s. w.

Zu b): Man kann auch so fortfahren: „Der Winkel DCB ist dem Winkel ABC gleich: folglich ist der Winkel ACB (von welchem der DCB ein Theil ist) gröfser als der Winkel ABC: welches des Vorauss. widerspricht, wonach diese Winkel gleich sind.

Dieses sind überhaupt die zwei Fälle, die bei den indirecten Beweisen vorkommen: man führt entweder auf etwas, das ausgemachten Wahrheiten widerspricht, oder aus etwas, das der Voraussetzung widerspricht, hinaus.

Lambert bemerkt, dafs sich einer von diesen Fällen in den andern verwandeln lasse; dafs aber doch die Möglichkeit dieser Verwandlung den Unterschied der beiden Fälle nicht aufhebe, weil, wie dieſs bei allen Schlufsarten der Fall ist, in besondern Umständen bald

der eine, bald der andere natürlicher und ungezwungener gebraucht werden könne. (Org. Dianoiol. §. 367.)

§. 84. Sonst kann hier in Absicht auf die indirecten Beweise noch kurz bemerkt werden:

1) Wenn bei einem indirecten Beweis mehrere Lehrsätze oder Axiome als Prämissen gebraucht werden: so lassen sich demselben gewöhnlich mehrerlei Wendungen dergestalt geben, dafs der Schlufssatz bald der einen bald der andern jener Prämissen widerspricht.

2) Der indirecte Beweis ist eine Art von Analysis; die gewöhnlichen Analysen sind nämlich θετικαι των αρχων, wie Proclus sagt; diese aber αναιρετικαι των αρχων. S. Chrestom. geom. p. 211., wo man über diesen Gegenstand eine Stelle findet, die eine der merkwürdigsten und lehrreichsten ist, welche Proclus hat. Der Ausdruck Analysis destructiva, den Scarburgh hat (s. Camerer p. 51.), ist also von Proclus entlehnt. — Die Einleitung zu dieser Analyse könnte besonders beim mündlichen Lehrvortrag füglich immer, wie in §. 62. 63. 65., 66. mit einer Frage gemacht werden.

3) Ueber die von einzelnen gegen diese Beweisart gemachten Einwendungen, von den gemachten Versuchen, sie zu umgehen, Behauptungen von ihrer Entbehrlichkeit oder Unentbehrlichkeit, Vorschläge, ihren Gebrauch einzuschränken, s. mehreres in d. a. O. der Chrestom. geom.

§. 85. Andere Wendung des Beweises im Texte; ebenfalls mit Beiziehung der Flächen der Dreiecke. Zur Vorbereitung oder als Lehnsatz beweise man:

(*Fig.* 40.) „Wenn zwei ungleiche Dreiecke ABC, DEF einen Winkel BAC einem Winkel EDF gleich, und von den ihn einschliefsenden Seiten die eine AB der einen DE gleich haben: so werden sie die andere AC der andern DF ungleich haben; nämlich das gröfsere Dreieck wird die gröfsere haben."

Es sey ABC das gröfsere Dreieck: so wird die Seite AC gröfser als die DF seyn. Denn wären diese gleich: so wären auch die Dreiecke gleich, nach I, 4. Wäre aber DF gröfser als AC; so wäre, wenn man die DG der AC gleich abschneidet, und EG zieht, das Dreieck EDG dem Dreieck ABC gleich (I, 4.), und mithin das Dreieck DEF gröfser als das Dreieck ABC. Es ist aber nach der Vorauss. kleiner. Folglich u. s. w.

Dieses vorausgesetzt, läfst sich der Satz VI. so beweisen (s. Fig. in d. Uebers.): Wären die AB, AC ungleich u. s. w.: wie im Texte; bis: und man ziehe die

CD. Nun ist das Dreieck ABC gröfser als das Dreieck DBC, welches ein Theil von ihm ist: sie haben aber den Winkel ACB dem Winkel DBC (nach der Vorauss.) gleich, und die Seite BC gemeinschaftlich; welches die eine von den die gleichen Winkeln einschliefsenden ist: folglich ist (nach dem vorausg. Satz) die andere Seite AC gröfser als die BD. Sie war ihr aber auch gleich: welches unmöglich ist. Folglich u. s. w.

§. 86. Anderer directer Beweis vermittelst des Satzes in §. 47., ebenfalls mit Zuziehung der Flächen:

(*Fig.* 41.) Es sey das Dreieck ABC, in welchem die Winkel ABC, ACB gleich seyen. Man schneide von AB, AC irgend zwei beliebige gleiche Stücke BD, CE ab, und ziehe CD, BE. Weil nun die beiden DB, BC den beiden EC, CB stückweise gleich sind, und der Winkel DBC dem ECB gleich: so ist (I, 4.) die Grundlinie DC der EB gleich, und das Dreieck DBC dem Dreieck ECB gleich; auch der Winkel BCD dem CBE gleich. Und nimmt man diese von den gleichen BCA, CBA weg: so sind die übrigen Winkel ACD, ABE gleich. Auch nehme man von dem ganzen Dreiecke ABC die gleichen Dreiecke DBC, EBC weg: so sind die übrigen Dreiecke ACD, ABE gleich. Da demnach die Dreiecke ACD, ABE gleich grofs sind, und den Winkel ACD den Winkel ABE, und die Seite CD der Seite BE gleich haben: so wird auch (§. 47.) die übrige Seite AC der übrigen AB gleich seyn; w. z. e. w.

§. 87. Die Beiziehung der Fläche hier, wo es sich blofs von Gleichheit der Seiten und Winkel handelt, ist von Mehreren als unangemessen getadelt worden; welche daher die Zurückführung auf das Unmögliche bei den Winkeln (nach §. 84. a, b.) vorziehen. Und da der 1. Theil von I, 26. sich unmittelbar auf I, 4. gründet, und vor I, 6. bewiesen werden kann: so könnte man den Beweis auch vermittelst jenes, auf ähnliche Art wie in §. 56. von Satz I, 5., so führen:

(*Fig.* 42.) Man gedenke sich zu dem Dreieck ABC ein anderes a b c, welches die bc der BC, und die Winkel b, c den Winkeln B, C gleich habe. Da nun diese Dreiecke ABC, abc die Winkel B, C den Winkeln b, c, und die Seite BC der Seite bc gleich haben, welche an den gleichen Winkeln liegt: so ist auch (I, 26. 1. Th.) die AB der ab gleich. Wiederum da dieselben Dreiecke die Winkel C, B den Winkeln b, c, und die Seite CB der bc gleich haben, welche an den gleichen Win-

keln liegt: so ist (I, 26. 1. Th.) auch die AC der ab gleich. Demnach ist jede der beiden AB, AC der ab gleich: folglich sind die AB, AC einander gleich w. z. e. w.

So fern sich I, 26. 1. Th. (s. die Anm. dort) blofs durch Congruenz erweisen läfst; so liefse sich auch dieser Beweis blofs durch Aufeinanderlegen führen.

§. 88. Anderer directer Beweis vermittelst I, 26. 1. Th.

(*Fig.* 29.) Man verlängere die BA, CA, und nehme die BD, CE einander gleich; ziehe CD, BE. Da nun die zwei DB, BC den zweien EC, CB, und der Winkel DBC dem ECB gleich ist (Vorauss.): so ist (I, 4.) die DC der EB, und der Winkel BDC dem CEB, und der Winkel BCD dem CBE gleich. Und wenn man von diesen die gleichen BCA, CBA wegnimmt; so sind auch die übrigen ACD, ABE gleich. Da demnach die Winkel ADC, ACD den Winkeln AEB, ABE gleich sind, und die Seite DC der Seite EB gleich ist, welche an den gleichen Winkeln liegt: so ist (I, 26. 1. Th.) auch die AC der AB gleich; w. z. e. w.

§. 89. Folgerungen und Anwendungen von Satz VI.

1) Gleichwinklichte Dreiecke (d. i. die alle drei Winkel einander gleich haben) sind auch gleichseitig (haben auch alle drei Seiten einander gleich). — Wird aus I, 6. auf ähnliche Art bewiesen, wie der Satz §. 59. aus I, 5.

2) a) (*Fig.* 43.) Wenn an eine gerade Linie AB in ihren Endpunkten A, B, und an einerlei Seite derselben zwei gerade Linien AC, BD unter gleichen Winkeln gezogen sind, und auf ihr, ebenfalls an der nämlichen Seite, ein gleichschenklichtes Dreieck EAB errichtet wird, dessen einer Schenkel AE mit der einen der gezogenen AC zusammenfällt: so fällt auch der andere Schenkel mit der andern gezogenen BD zusammen. — Beweis aus I, 5. Denn fiele er anders; so wäre der Winkel ABE dem Winkel ABD ungleich. Der Winkel ABE ist aber dem Winkel EAB gleich (I, 5.) weil die EA, EB gleich sind: folglich wäre der Winkel EAB oder CAB dem Winkel ABD ungleich; gegen die Voraussetzung.

b) Wenn an die AB die AC, BD gezogen sind, wie vorhin; und auf der AB an der nämlichen Seite ein ungleichschenklichtes Dreieck EAB errichtet wird, dessen ein Schenkel AE mit der einen gezogenen AC zusammenfällt: so fällt der andere Schenkel nicht mit der andern gezogenen BD zusammen. — Denn fiele er mit

ihr zusammen; so wäre das Dreieck EAB, da es die Winkel EAB, EAB gleich hätte, ein gleichschenklichtes (I, 6.); gegen die Vorauss.

§. 90. (*Fig.* 44.) „Wenn von den Endpunkten B, C eines Paars gleicher von den Schenkeln eines Winkels BAC abgeschnittener Stücke AB, AC an die gegenüberliegenden Endpunkte E, D eines andern Paars AE, AD gerade Linien BE, CD gezogen werden, und an deren Durchschnittspunkt F von des Winkels Spitze A eine gerade Linie AF gezogen wird: so halbirt diese den Winkel BAC, und die die Endpunkte des kleinern Paars verbindende gerade Linie BC."

Bew. a) Es wird, wie im Beweis von I, 5., gezeigt: dafs der Winkel ABE dem Winkel ACD, und der Winkel CBE dem Winkel BCD gleich sey. Daher sind (I, 6.) im Dreieck FBC die FB, FC gleich.

b) Da demnach die zwei AC, BF den zweien AC, CF gleich sind, und der Winkel ABF dem Winkel AEF gleich ist: so ist (I, 4.) der Winkel BAF dem CAF gleich; d. i. der Winkel BAC ist durch die AF halbirt.

c) Die AF schneide die BC in G. Da nun die zwei BA, AG den zweien CA, AG gleich sind, und der Winkel BAG dem CAG gleich ist (nach b.): so ist die BG der CG gleich (I. 4.); d. h. die BC ist durch die AF halbirt.

§. 91. Hiedurch lassen sich folgende Aufgaben anders als in I, 9. 10. auflösen:

1) Einen gegebenen Winkel BAC halbiren.

Man schneide von seinen Schenkeln die gleichen Stücke AB, AC, und wiederum die gleichen Stücke AD, AE ab, und ziehe BE, CD, welche einander in F schneiden; und ziehe die AF: so wird diese den Winkel BAC halbiren, nach dem vorherg. §. 90. Diese Auflösung gibt Proclus in seinen Bemerkungen zu I, 9. (s. Chrestom. geom. p. 240.)

2) Eine gegebene gerade Linie BC halbiren.

Man errichte auf der BC ein gleichseitiges Dreieck ABC (I, 1.), verlängere seine Seiten AB, AC, und schneide die gleichen Stücke AD, AE ab; ziehe die BE, CD, welche einander in F schneiden, und ziehe die AF, welche die BC in G schneide: so wird die BC in G halbirt seyn, nach §. 90.

§. 92. Andere Anwendungen des Satzes VI. finden sich in Chreom. geom. S. 327. 328., S. 385. S. 387.

§. 93. Satz 61. convertirt blofs den ersten Theil des Satzes V. Des zweiten Theils Converse wäre: „Wenn zwei Seiten eines Dreiecks verlängert die Winkel unter der Grundlinie gleich machen: so sind dieselben einander gleich;" welche Euklid, so wie manche andere Conversen, wenn er sie zu seinem System nicht braucht, übergeht; indem auch ihre Bedingung vermittelst I, 13. sich auf die Bedingung des Satzes VI. reducirt.

(*Fig.* 45.) Beweis dieser Converse. Es sey ein Dreieck ABC, dessen zwei Seiten AB, AC nach D, E verlängert seyen, und die Winkel DBC, ECB unter der Grundlinie BC gleich machen: so werden die Seiten AB, AC gleich seyn. — Man nehme die Verlängerungen BD, CE einander gleich, und ziehe die BE, CD.

Wären nun die AB, AC nicht gleich; so ist eine von ihnen die gröfsere; es sey die AB; und man schneide von ihr die der AC gleiche BF ab (I, 3.), und ziehe CF. Da nun

a) die zwei DB, BC den zweien EC, CB, und der Winkel DBC dem ECB gleich ist (Vorauss.); so ist (I, 4.) die DC der EB gleich, und $\triangle DBC = \triangle ECB$, und Winkel D=E, DCB=EBC.

b) Da die FB der AC, und die BD der CE gleich ist: so ist auch die ganze FD der ganzen AE gleich. Da demnach die zwei FD, DC der zweien AE, EB, und der Winkel FDC dem AEB gleich ist: so ist auch (I, 4.) die FC der AB gleich, und $\triangle FDC = \triangle ABE$, und Winkel DCF=EBA.

c) Mithin, wenn man von den gleichen Dreiecken FDC, ABE die gleichen DBC, ECB hinweg nimmt: so ist auch das übrige FBC dem übrigen ABC gleich, der Theil dem Ganzen: welches unmöglich ist. Folglich können die AB, AC nicht ungleich seyn; also sind sie gleich. — Diesen Beweis gibt Camerer p. 52. s.

Man kann auch hier, ohne Beiziehung der Flächen der Dreiecke, schliefsen: Wenn man von den gleichen Winkeln DCF, EBA (b), die gleichen DCB, EBC (a) wegnimmt: so sind die übrigen BCF, CBF gleich; folglich ist auch (I, 6.) die FB der FC gleich. Es ist aber auch gezeigt worden (b), dafs die AB der FC gleich sey. Folglich ist die FB der AB gleich, ein Theil dem ganzen: welches unmöglich ist u. s. w.

Oder: Man verlängere auch die FC nach G: und nachdem gezeigt worden ist, dafs die FB der DC gleich sey, so wird (I, 5.) der Winkel DBC unter der Grund-

linie dem Winkel GCB gleich seyn, und mithin gröfser als der Winkel ECB; welches gegen die Vorauss. ist, wornach diese Winkel gleich sind. Folglich u. s. w.

§. 94. (*Fig.* 46.) Proclus gibt folgenden directen Beweis von der zweiten Converse des 5ten Satzes (s. Chrestom. geom. p. 220.). Nachdem man die BD, CE gleich genommen, ziehe man DE, BE, CD. So wird

a) wie in §. 93, a. bewiesen, dafs DC=EB, und die Winkel DCB, EBC gleich seyen. Nimmt man diese von den gleichen ECB, DBC hinweg: so sind die übrig bleibenden ECD, DBE gleich.

b) Da demnach die zwei DB, BE den zweien EC, CD, und der Winkel DBE dem Winkel ECD gleich ist: so ist (I, 4.) auch der Winkel BDE dem CED gleich. Mithin da in dem Dreieck ADE die Winkel ADE, AED gleich sind; so sind auch die Seiten AD, AE gleich (I, 6.). Von diesen sind aber die Stücke BD, CE gleich (Constr.): folglich sind auch die übrigen AB, AC gleich; w. z. e. w.

§. 95. Aus den zwei Conversen des Satzes I, 5., nämlich dem Satze I, 6. und der Converse §. 93., folgt, dafs auch die zwei Consequenzen des Satzes I, 5. einander wechselseitig zur Folge haben; dafs nämlich „wenn in einem Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind, auch die Winkel unter der Grundlinie gleich seyen; und umgekehrt." Denn sind die Winkel an der Grundlinie gleich: so ist das Dreieck gleichschenklicht (I, 6.), und also (I, 5.) auch die Winkel unter der Grundlinie gleich. Sind die Winkel unter der Grundlinie gleich; so ist das Dreieck wiederum gleichschenklicht (§. 93.): mithin (I, 5.) auch die Winkel unter der Grundlinie gleich. Dieses folgt übrigens allgemeiner aus dem folgenden I, 13., wonach, wenn irgend zwei Winkel einander gleich sind, auch ihre Nebenwinkel einander gleich seyn werden.

Satz VII. VIII.

§. 96. Satz VII. dient als Vorbereitung zum Beweise des VIIIten, oder in anderer Rücksicht zur Erforschung und Analyse des VIIIten: in welchem zwei Dreiecke (s. Fig. zu I, 8. in d. Uebers.) ABC, DEF betrachtet werden, welche zwei Seiten BA, AC zweien Seiten ED, DF, je eine einer, gleich, und auch die Grundlinie BC

der Grundlinie EF gleich haben; und die Frage ist: ob dieselbe einander decken können? Da nun, wenn man das Dreieck ABC über das Dreieck EDF, und den Punkt B auf E, und die BC auf die EF bringt, der Punkt C allerdings auch auf F fällt, weil die BC, EF gleich sind: so ist nun die Frage: ob der Punkt A auch auf den Punkt D fallen werde, ob er nicht anders wohin nach G fallen könne? so dafs das Dreieck ABC das Dreieck GEF deckte, mithin die zwei EG, GF den zweien ED, DF gleich wären?

Statt zu sagen, es sey ein Dreieck EDF auf der Grundlinie EF; kann man sagen: Es seyen auf der EF zwei mit ihr einerlei Endpunkte E, F habende gerade Linien ED, DF am Punkt D zusammengestellt (*προς τῳ Δ σημειῳ συνεσανται*); und ebenso in Betreff des Dreiecks EGF. Also die Frage ist: ob es möglich sey, auf einer geraden Linie EF und an einerlei Seite derselben zwei Paare mit der EF einerlei Endpunkte habender gerader Linien, welche einander, je eine einer, gleich seyen, an zwei verschiedenen Punkten D, G zusammen zu stellen? Dafs dieses unmöglich sey, wird in Satz VII. bewiesen; und hieraus im Beweise des Satzes VIII. gefolgert: dafs der Punkt A nicht anders als auf D fallen könne; folglich die Dreiecke sich decken müfsen; namentlich der Winkel BAC den Winkel EDF decke, und ihm also gleich sey.

§. 97. Der Fall, dafs der Punkt A oder G auf eine der Seiten ED, DF oder auf ihre Verlängerung über D hinaus falle, erledigt sich von selbst als unmöglich, da er offenbar der vorausgesetzten Gleichheit der AB und DE, der AC und DF, widerspricht. Demnach wären noch folgende drei Fälle zu untersuchen übrig:

1) (*Fig.* 47.) Wenn der Punkt G aufserhalb des Dreiecks EDF, und die gerade Linie DG aufserhalb der beiden Dreiecke EDF, EGF fiele (Fig. a.);

2) Wenn der Punkt G aufserhalb des Dreiecks EDF, und die gerade DG innerhalb des Dreiecks EGF fiele (Fig. b.);

3) Wenn der Punkt G innerhalb des Dreiecks EDF fiele: in welchem Fall die gerade DG innerhalb des Dreiecks EDF fällt (Fig. c.).

Die beiden Fälle 2) und 3) reduciren sich bei der allgemeinen Fassung der Frage auf einen: ob die zwei Paare gerader Linien, von welchen die Rede ist, an verschiedenen Punkten D und G so zusammengestellt werden können, dafs die diese Punkte verbindende ge-

rade Linie DG innerhalb des von dem einen zusammengestellten Paare eingeschlossenen Dreiecks falle?

Und der erste Fall heifst: Ob jene zwei Paare so zusammengestellt werden, an D und G, dafs die diese Punkte verbindende gerade Linie aufserhalb der beiden von den zusammengestellten Paaren eingeschlossenen Dreiecke falle?

§. 98. Des ersten Falls Unmöglichkeit wird im Texte bewiesen mittelst I, 5. 1 Thl.: Den Beweis für den zweiten Fall, der auf beiden Theilen von I, 5. beruht, der aber in den Handschriften des Textes fehlt, hat die aus dem Arabischen gemachte Uebersetzung, die des Campanus Namen führt; auch Proclus trägt ihn vor, so zwar, dafs man sieht, dafs derselbe im dem Texte, welchen er vor sich hatte, schon fehlte. Indessen da der zweite Theil von I, 5. ohne den Gebrauch, der für diesen zweiten Fall davon zu machen ist, ganz unnütz wäre: so läfst sich nicht zweifeln, dafs der Euklidische Text ursprünglich auch diesen zweiten Fall gehabt habe, der zur Vollständigkeit des Beweises durchaus nothwendig ist.

(*Fig.* 48.) Die Exposition des Satzes VII. im Texte (nach d. Uebers.) vorausgesetzt; läfst sich die Unmöglichkeit des zweiten Falls so darthun: Es seyen: wenns möglich ist, auf der AB zwei gerade Linie AC, CB, und zwei andere ihnen, je eine einer, gleiche AD, DB an zwei verschiedenen Punkten C, D und an einerlei Seite CD, und aus den nämlichen Endpunkten A, B zusammengestellt, so dafs die die zwei verschiedenen Punkte verbindende gerade Linie CD innerhalb des von dem einen zusammengestellten Paar eingeschlossenen Dreiecks ACB falle. Und man verlängere AC, AD nach E und F. Da nun die AC der AD gleich ist; so ist der Winkel ECD dem Winkel FDC gleich (nach I, 5. 2 Thl.); folglich ist der Winkel BDC gröfser als der Winkel ECD und noch viel mehr gröfser als der Winkel BCD. Da aber die BC der BD gleich ist: so ist (I, 5. 1 Thl.) der Winkel BDC dem Winkel BCD gleich. Er ist aber, wie gezeigt worden, viel gröfser: welches unmöglich ist. Folglich können nicht u. s. w.

(*Fig.* 49.) Wenn man im ersten Falle die AC, AD über A hinaus nach E und F verlängert: so läfst sich der Beweis mit den nämlichen Worten führen; aufser dafs hier die erste Gleichheit der Winkel auch auf I, 5. 1 Thl. beruht. Diese Bemerkung macht Peyrard in

seiner Ausg. d. El. in der Hinsicht, dafs auf diese Art das, was im Beweise des Textes vermifst wird, keiner Ergänzung in Worten, sondern blofs einer neuen Figur für den zweiten Fall bedürfe. — Uebrigens kann man mit dem Dreieck BCD anfangen, in welchem Winkel BCD = CDB also > CDF, und noch mehr Winkel ECD > CDF: aber auch gleich (I, 5. Thl. 1 oder 2. in Fig. 49. oder 48.); welches unmöglich. So, nur mit Verwechslung von A und B, lautet der Beweis bei Peyrard, wie auch schon für Fall 2. bei Campanus.

§. 99. Aus dem §. 64. 66. Vorgetragenen folgt kurz

1) die Unmöglichkeit des ersten Falls (*Fig.* 49.): sonst hätten zwei gleichschenklichte Dreiecke ACD, BCD auf einerlei Grundlinie CD und an einerlei Seite ihre Spitzen A, B in einer aufserhalb der beiden Dreiecke liegenden geraden Linie AB; welches unmöglich ist (§. 63.).

2) Die Unmöglichkeit des zweiten Falls (*Fig.* 48.): sonst hätten zwei gleichschenklichte Dreiecke ACD, BCD auf einerlei Grundlinie CD und an verschiedenen Seiten derselben ihre Spitzen A, B in einer aufserhalb der beiden Dreiecke liegenden geraden Linie AB; welches unmöglich ist (§. 66.).

Die Unmöglichkeit beider Fälle folgt aus §. 67, b.: es würden nämlich auf einerlei Grundlinie CD zwei gleichschenklichte Dreiecke AED, BCD dergestalt stehen, dafs die ihre Spitzen verbindende gerade Linie AB aufserhalb der beiden Dreiecke fiele: welches unmöglich ist.

§. 100. Anderer Ausdruck des Satzes VII. (vergl. Simson bei Matthias S. 6.): „Auf einerlei Grundlinie und an einerlei Seite derselben können nicht zwei verschiedene Dreiecke die in den nämlichen Endpunkten der Grundlinie sich endigenden Seiten gleich haben." Und zwar

Fall I. weder so, dafs die Spitze eines jeden aufserhalb des andern liege (oder dafs die zwei Dreiecke theils aufserhalb, theils innerhalb einander fallen; oder dafs sie einander schneiden; oder dafs ihre Perimeter einander schneiden);

Fall II. noch so, dafs die Spitze des einen innerhalb des andern liege (oder dafs das eine Dreieck ganz innerhalb des andern eingeschlossen sey).

Oder, mehr nach den Worten des Textes: „Aus den Endpunkten eben derselben geraden Linie lassen

sich nicht an einerlei Seite derselben (in der nämlichen Ebene) an zwei verschiedene Punkte hin gerade Linien so ziehen, dafs beide aus dem nämlichen Endpunkt der erstgenannten geraden Linie gezogene gerade Linien einander gleich seyen."

§. 101. (*Fig.* 50. a. b.) „Zwei Kreise können einander an einerlei Seite der ihre Mittelpunkte verbindenden geraden Linie AB nicht in mehr als Einem Punkte schneiden."

Denn gesetzt, sie schnitten einander an einerlei Seite der AB in zwei Punkten C, D; und man ziehe die AC, AD, BC, BD. Da nun A der Mittelpunkt des einen Kreises ist, so ist die AC der AD gleich (Def. 15.); und da B der Mittelpunkt des andern Kreises ist, so ist die BC der BD gleich. Mithin wären aus den Endpunkten der AB und an einerlei Seite von ihr zwei Paare; je zwei und zwei gleicher, gerader Linien an verschiedenen Punkten C, D zusammengestellt; welches nach S. VII. unmöglich ist. Folglick können etc.

Dieser Satz, welchen Wolf in seinen Elem. Geom. §. 204. statt des Satzes VII. zum Beweis des VIIIten gebraucht, hat ebenso, wie S. VII., zwei Fälle; von welchen Wolf auch blofs den einen in §. 202. a. a. O. beweist.

§. 102. Auf eine andere Art wollten die Schüler des Philo, wie Proclus berichtet, den Satz VIII. beweisen, ohne des VIIten dabei zu bedürfen (*οἱ περὶ Φίλωνα μηδὲν τοῦτο φασὶ προσδεηθέντες ἀποδεῖξαι τὸ ὀγδοον.* Chrestom. geom. p. 233.). Von diesem Beweise nachher §. 148.

§. 103. Dafs unter den Bedingungen des S. VIII. auch die Dreiecke selber gleich grofs seyen, kann entweder aus dem Beweise desselben, vermöge dessen sie einander decken, oder aus dem Satze selbst mit Zuziehung des 4ten gefolgert werden. Euklid läfst diesen Beisatz weg, weil er ihn im Folgenden nicht gebraucht, indem er die Gleichheit der Dreiecke, wo er sie zu schliefsen braucht, wie z. B. in I, 34. 35. XI, 24., durch I, 4. schliefst.

Noch mehr war der weitere Beisatz, die übrigen Winkel betreffend, entbehrlich, dafs die den gleichen Seiten gegenüberliegenden einander gleich seyen, indem diese Gleichheit im Satze selber liegt oder durch unmittelbare Anwendung desselben folgt; wie z. B. dafs der Winkel bei B dem bei E gleich sey; indem man

schliefst: da die Seiten AB, BC den Seiten DE, EF gleich sind, und die Grundlinie AC der DF gleich ist: so ist auch der Winkel dem Winkel gleich, welchen die gleichen Seiten einschliefsen, das ist, der Winkel ABC dem DEF; so fern man immer jede Seite, welche man will, zur Grundlinie nehmen kann. — Oder man schliefst die Gleichheit dieser übrigen Winkel nach einmaliger Anwendung des Satzes 8. sofort durch Anwendung des 4ten. So lautet der Schluſs in VI, 5. nach Zambertus Ausgabe: „Duae igitur DE et *EZ* duabus *HE* et *EZ* sunt aequales, et basis *⊿Z* basi *ZE* est aequalis. Angulus igitur *⊿EZ*, per 8. primi, angulo *HEZ* est aequalis, et triangulum *⊿EZ* (per 4. primi) triangulo *HEZ* est aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequlia latera subtenduntur. Aequalis igitur est angulus *⊿ZE* angulo *HZE*, et angulus *E⊿Z* angulo *EHZ*."

Man kann also hiebei, so wie auch bei I, 26., bemerken, daſs Euklid nicht alles, was sein Beweis darthut, in den Satz aufnimmt, indem er die Aussagen der Sätze gern so kurz als möglich faſst, und sie daher auf das, was in Beziehung auf den Gebrauch im Folgenden nothwendig ist, beschränkt.

§. 104. Anwendungen des Satzes VII.

1) (*Fig.* 51.) „Auf einer geraden Linie an einerlei Seite derselben kann nicht mehr als Ein gleichseitiges Dreieck stehen." Denn stünden auf der AB an einer Seite derselben zwei gleichseitige Dreiecke ACB, ADB: so wären aus den Endpunkten A, B und an einerlei Seite einer geraden Linie AB zwei Paare einander, zwei und zwei gleicher, gerader Linien an verschiedenen Punkten C, D zusammengestellt, welches unmöglich ist.

2) „Zwei Dreiecken ACB, ADB (Fig. d. 7ten S.), welche die Grundlinie AB gemeinschaftlich, und eine Seite AC einer Seite AD gleich haben, die an dem nämlichen Endpunkt der Grundlinie liegt, den daran liegenden Winkel an der Grundlinie aber ungleich haben (nämlich die Winkel CAB und DAB); haben auch die übrige Seite CB der übrigen DB ungleich." Denn wären diese Seiten gleich; so wären aus den Endpunkten A, B u. s. w. welches nach S. 7. unmöglich ist.

3) Die Sätze in §. 63. 66. lassen sich hinwiederum aus Satz VII. folgern; so wie nach dem, was §. 99. bemerkt worden, dieser letztere aus jenen folgt.

§. 105. Anwendungen des Satzes VIII., die keinen der nachfolgenden Sätze voraussetzen, kommen in der Chrestom. geom. vor.

S. 326. „In einem Viereck — — wo unter 5) zu lesen ist: „von den vier Dreiecken, worein die zwei Diagonalen das Viereck theilen, sind jede zwei an den nämlichen Seiten dieser letztern Diagonale (derjenigen nämlich, welche durch die Spitzen der von den nicht als gleich vorausgesetzten Seiten eingeschlossenen Winkel geht) an einander liegende durchaus gleich."

S. 327. Nr. 10. „Wenn in einem Viereck zwei an einander —

S. 328. Nr. 15. „Wenn in einem Viereck zwei anliegende Seiten —

S. 329. Nr. 16. „Wenn in einem Viereck zwei anliegende Seiten —

S. 331. Nr. 25. „Wenn auf einer Grundlinie — 2te Constr.

S. 332. b) „Wenn in einem Viereck die Seiten —

S. 337. „Satz II. Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck —

S. 387. „Satz 7. Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten —

Satz IX.

§. 106. Analysis. a) Es sey der Winkel BAC zu halbiren (s. Fig. d. S. in d. Uebers.). Man setze, es geschehe durch die gerade Linie AF, und nehme auf ihr einen beliebigen Punkt F: so ergibt sich aus I, 4.: dafs, wenn man von den Schenkeln irgend zwei einander gleiche Stücke AD, AE abschneidet, und FD, FE zieht, diese gleich seyn werden.

b) Umgekehrt: wenn die AD, AE einander gleich abgeschnitten werden, und innerhalb des Winkels BAC ein Punkt F dergestalt sich finden läfst, dafs die von ihm nach D und E gehende gerade Linien gleich seyen; so wird vermöge I, 8. der Winkel BAC durch die AF halbirt seyn.

c) Ein solcher Punkt läfst sich aber (nach dem, was auch schon §. 21. 23. bemerkt worden) finden, indem man mittelst I, 1. ein gleichseitiges Dreieck auf der DE beschreibt. Es sey DFE ein solches: so wird dessen

Spitze F innerhalb des Winkels BAC fallen (nach §. 67., und wie auch Proclus zu I, 9. ausdrücklich beweist. a. Chrestom. geom. p. 238. s.)

§. 107. Da übrigens, wenn das gleichseitige Dreieck an derjenigen Seite der DE beschrieben würde, an welcher der Punkt A liegt: dessen Spitze auf den Punkt A selber, oder aufserhalb des Winkels BAC über A hinaus fallen könnte; von welchen Fällen der erste gar nichts, der andere erst durch einen Umweg mit Beiziehung des Satzes I, 4. zur Auflösung dienen würde; und die Unterscheidung und Erörterung dieser Fälle, welche Proclus (s. Chrest. geom. p. 240.) vornimmt, eine Weitläufigkeit verursachen würde, welche besser umgangen wird: so ist das gleichschenklichte Dreieck auf der DE an der andern Seite von ihr zu beschreiben, als an welcher der Punkt A liegt; welches immer angeht, wie §. 10. bemerkt worden.

§. 108. Anderer Beweis der Auflösung mittelst §. 68. und I, 4. Da auf der Grundlinie DE an verschiedenen Seiten von ihr zwei gleichschenklichte Dreiecke (oder ein gleichschenklichtes und gleichseitiges) ADE, FDE stehen; so schliefsen ihre Schenkel an den Endpunkten der Grundlinie gleiche Winkel ein, d. i. die Winkel ADF, AEF sind gleich. Da demnach die Seiten AD, DF den Seiten AE, EF, und der Winkel ADF dem Winkel AEF gleich ist: so ist (I, 4.) auch der Winkel DAF dem EAF gleich.

§. 109. (*Fig.* 52.) Es sey der Winkel BAC durch die AE halbirt, und durch seine Spitze A innerhalb desselben eine andere AG gezogen: so theilt diese den Winkel BAC in ungleiche Theile. Denn da der Winkel BAF dem FAC gleich ist, so ist er gröfser als der Winkel GAC; und noch viel mehr ist der Winkel BAG gröfser als der Winkel GAC. — Also ein Winkel läfst sich nur durch eine einzige gerade Linie halbiren.

§. 110. a. Ein gegebener Winkel läfst sich in 4, 8, 16, 32, ... gleiche Theile theilen. Denn wenn man den gegebenen Winkel halbirt hat: so läfst sich jeder der beiden Winkel, die die Hälften des ersten sind, wiederum halbiren: so wird der erste in vier gleiche Theile getheilt. Und wenn man jeden von diesen wiederum halbirt: so erhält man acht gleiche Theile des ersten. Und hieraus wird man auf gleiche Weise sechszehn gleiche Theile erhalten, und so fort, indem die vorhergehende Anzahl immer verdoppelt wird.

b. Die Hälfte eines nach der gewöhnlichen Benennung genommenen Winkels ist immer kleiner als ein rechter, oder spitzig: denn ein Winkel im gewöhnlichen Verstande genommen ist immer kleiner als 2 rechte; daher seine Hälfte kleiner als ein rechter. So ist ein Viertel eines Winkels kleiner als ein halber rechter, ein Achtel eines Winkels kleiner als ein Viertels rechter u. s. f.

§. 111. „Wenn ein in ungleiche Theile getheilter Winkel auch in gleiche Theile getheilt wird: so fällt die gerade Linie, die ihn in gleiche Theile theilt, innerhalb des gröfsern der ungleichen Theile."

(*Fig.* 53.) Es sey der Winkel BAC durch die AE in ungleiche Theile getheilt, und BAE sey der gröfsere Theil; und man halbire den Winkel BAC: so wird die halbirende AF innerhalb des Winkels BAC fallen. Denn sie kann nicht auf die AE fallen; sonst würde sie ihn in ungleiche Theile theilen: auch nicht innerhalb des Winkels EAC; denn da der Winkel BAE >EAC; so wäre er >FAC; und noch viel mehr der Winkel BAF >FAC.

§. 112. (*Fig.* 54.) 1) „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck ABC eine von der Spitze A an die Grundlinie BC gezogene gerade Linie den Winkel an der Spitze halbirt: so halbirt sie auch die Grundlinie BC und das Dreieck ABC." (I, 4.) 2) Und „wenn sie den Winkel an der Spitze in ungleiche Theile theilt: so theilt sie auch die Grundlinie und das Dreieck in ungleiche Theile, und der gröfsere Theil von diesen wird an der Seite des gröfsern Theils des Winkels an der Spitze liegen." Denn die AE theile den Winkel BAC in ungleiche Theile, und BAE sey der gröfsere Theil: so wird auch BE der gröfsere Theil der Grundlinie BC, und das Dreieck ABE der gröfsere Theil des Dreiecks ABC seyn. Denn man halbire (I, 9.) den Winkel BAC durch die AD, welche innerhalb des Winkels BAE fallen wird (§. 111.): so ist (nach 1) die BD=DC, und △ABD=△ADC. Folglich ist BD >EC, und noch viel mehr BE >EC. Ebenso △ABD>△AEC, und noch viel mehr △ABE >△AEC. — Indirect ist dieses in §. 111 bewiesen worden.

§. 113. 1) „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck ABC eine von der Spitze A an die Grundlinie BC gezogene gerade Linie die Grundlinie BC oder das

Dreieck ABC halbirt: so halbirt sie auch den Winkel an der Spitze BAC."

2) Und „wenn sie die Grundlinie oder das Dreieck in ungleiche Theile theilt: so theilt sie auch den Winkel an der Spitze in ungleiche Theile; und der gröfsere Theil liegt an der nämlichen Seite mit dem gröfseren Theile von jenen."

Denn 1) es halbire die AD die Grundlinie BC oder das Dreieck ABC. Wenn sie nun nicht auch den Winkel an der Spitze halbirte; so wären die Winkel BAD, DAC ungleich, und einer der gröfsere, es sey der BAD: so wäre aber auch (§. 112.) die BD der gröfsere Theil der Grundlinie BC, und △ABD der gröfsere Theil des △ABC; gegen die Vorauss., dafs sie halbirt seyen.

2) Es theile die AE die Grundlinie BC in ungleiche Theile, und BE sey der gröfsere; oder das Dreieck ABC in ungleiche Theile, und △ABE der gröfsere: so wird auch der Winkel BAE der gröfsere Theil des Winkels BAC seyn. Denn wäre er diese nicht; so ist er entweder dem andern Theil CAE gleich, oder kleiner. Gleich aber ist er ihm nicht; sonst wären auch (§. 112.) die Theile BE, EC der Grundlinie gleich, und die Theile ABE, AEC des Dreiecks ABC gleich; gegen die Vorauss. Kleiner ist er auch nicht: sonst wäre auch BE der kleinere Theil der Grundlinie, und das △ABE der kleinere Theil des △ABC (§. 112.): gegen die Vorauss. Folglich ist er gröfser.

§. 114. Anwendung der Aufg. I, 9. „Innerhalb eines gegebenen Dreiecks einen Punkt zu finden, von welchem die an zwei Winkelpunkte desselben gehenden geraden Linien diese Winkel halbiren." Vgl. IV, 4.

Satz X.

§. 115. Analysis. a) Gesetzt, es sey die Grundlinie AB (Fig. zu I, 10. in d. Uebers.) irgend eines gleichschenklichten oder gleichseitigen Dreiecks CAB zu halbiren. Man setze, es sey geschehen in D: so wird, wenn man die CD zieht, diese auch den Winkel ACB halbiren (nach I, 8.).

Und umgekehrt: wenn der Winkel ACB durch die CD halbirt ist: so wird diese auch die AB halbiren, vermöge I, 4.

b) Da man nun jeden Winkel halbiren kann (I, 9.): so läfst sich auch jedes gleichseitigen oder gleichschenk-

lichten Dreiecks CAB Grundlinie AB halbiren, indem man den Winkel ACB an seiner Spitze halbirt.

b) Es sey nun irgend eine gegebene gerade Linie AB zu halbiren. Da dieses (vermöge a) geschehen kann, wenn auf der AB ein gleichseitiges Dreieck steht; auf der AB aber immer ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden kann (I, 1.): so läfst sich also die AB immer halbiren; und dieses wird geschehen, indem man auf ihr ein gleichseitiges Dreieck ACB beschreibt, und dessen Winkel an der Spitze C halbirt.

§. 116. (*Fig.* 55.) Wenn eine gerade Linie AB in D halbirt ist: so wird, wenn man zwischen ihrem Halbirungspunkt D und dem einen Endpunkt B einen Punkt E annimmt, die gerade Linie AB in diesem Punkt in ungleiche Theile getheilt seyn, deren gröfserer AE an dem andern Endpunkt A liegt. — Denn da die AD=DB; so ist sie >EB; und noch vielmehr ist die AE>EB.

Demnach kann eine gerade Linie nur in einem einzigen Punkt halbirt werden.

Und wenn eine gerade Linie AB in ungleiche Theile AE, EB getheilt ist: so wird, wenn man einen Punkt F auf dem kleinern Theil EB nimmt, die gerade Linie in demselben noch mehr in ungleiche Theile getheilt seyn. Denn wenn die AE>EF: so ist sie noch viel mehr >FB; und noch viel mehr ist die AF>FB.

Daher wenn eine in ungleiche Theile AE, EB getheilte gerade Linie halbirt wird: so fällt der Halbirungspunkt auf den gröfsern Theil AE. Denn in E kann er nicht fallen, und noch weniger in einen Punkt zwischen E und B, weil die AB in diesen Punkten ungleich getheilt ist. — Und wenn eine gerade Linie ungleich getheilt ist: so ist ihr gröfserer Theil gröfser, der kleinere Theil kleiner als die Hälfte derselben.

§. 117. Da, wenn man auf der AB das gleichseitige Dreieck ACB errichtet hat, um den Winkel ACB zu halbiren, nach I, 9. erforderlich ist, auf der AB an ihrer andern Seite ein anderes gleichseitiges Dreieck zu errichten; diese zwei gleichseitigen Dreiecke auf der AB aber durch die nämlichen zwei, aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB, und aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BA beschriebenen Kreise gefunden werden, indem man deren Durchschnitte zu den Spitzen der Dreiecke macht (§. 10.): so ergibt sich hieraus die Auflösung gegenwärtiger Aufgabe, welche Apollonius nach Proclus Bericht gegeben hat (s. Chrestom. geom.

p. 241.): dafs man nämlich die erwähnten zwei Kreise beschreiben, und ihre zwei Durchschnittspunkte C, D durch eine gerade Linie verbinden soll, welche die AB halbiren werde. Dafs sie sie aber überhaupt schneide, nicht aufserhalb ihr, noch auf einen ihrer Endpunkte fallen werde (*Fig.* 56.), sollte bewiesen werden; was entweder III, 2. voraussetzt, oder, wie §. 67. bemerkt worden, durch §. 65. 66. geschehen kann, indem man die geraden AC, CB, AD, DB zieht: weil sonst zwei gleichseitige Dreiecke ACB, ADB auf einerlei gerader Linie AB und an verschiedenen Seiten derselben ihre Spitzen C, D entweder in einer durch einen der Endpunkte der AB gehenden, oder in einer aufserhalb der beiden Dreiecke liegenden geraden Linie hätten; welches nach §. 65. 66. unmöglich ist.

§. 118. Da eine gegebene gerade Linie sich in zwei gleiche Theile theilen läfst: so läfst sie sich auch in vier gleiche Theile theilen, indem man jeden der zwei ersten Theile wiederum halbirt; und so fort in 8, 16, 32 u. s. w. gleiche Theile.

§. 119. In dem, was zu I, 9. 10. bemerkt worden, ist der allgemeinere Satz enthalten: „Wenn von den Endpunkten gleicher Schenkel eines Winkels an irgend einen Punkt der den Winkel halbirenden geraden Linie zwei gerade Linien gezogen werden; sie mögen nun in Einer geraden Linie an einander liegen, oder einen Winkel mit einander machen: so sind sie einander gleich.

Definition 10. Satz XI. Axiom 10.

§. 120. Zwei zusammentreffende gerade Linien treffen entweder in einem Punkte zusammen, der gemeinschaftlicher Endpunkt von beiden ist; in diesem Fall gebraucht Euklid das Wort ἅπτεσθαι, sie berühren einander (so in Def. 8.): oder die eine trifft mit ihrem Endpunkte die andere in einem Punkte, der nicht ihr Endpunkt ist; in diesem Fall sagt er: sie steht auf der andern auf, ist auf ihr aufgestellt (ἐφέστηκε, insistit); so in Def. 10. und in Satz 13. (καθεῖσα): oder beide begegnen einander in Punkten, die nicht ihre Endpunkte sind, sondern über die sie beide nach beiden Seiten hinausgehen; in diesem Falle sagt er, sie schneiden einander (τέμνεσι): so in I, 15. Von einer Linie, die eine andere trifft, sie mag nun über sie hinausgehen oder nicht, gebraucht er auch das Wort προσπίπτειν εἰς γραμμήν: wie in I, Def. 15. I, 27. 28. 29.

Zwei in einem gemeinschaftlichen Punkte, in welchem sie sich endigen, zusammentreffende gerade Linien liegen entweder geradefort an einander, oder nicht; und im letztern Fall machen sie einen Winkel mit einander. Zwei einander schneidende gerade Linien machen vier Winkel an ihrem Durchschnitt. Eine auf einer andern aufstehende gerade Linie macht mit ihr zwei Winkel, welche Nebenwinkel heifsen.

§. 121. Nebenwinkel heifsen nämlich jede zwei solche Winkel, welche einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und an verschiedenen Seiten desselben liegen. Oder: wenn aus dem Punkt, in welchem zwei gerade Linien zusammentreffen, sie mögen nun geradefort aneinander liegen oder nicht, irgend eine dritte gerade Linie so gezogen ist, dafs die beiden ersten nicht an einerlei Seite der dritten liegen: so heifsen die Winkel, welche die dritte mit jeder der beiden ersten macht, Nebenwinkel (anguli deinceps positi, αι εφεξης γωνιαι).

§. 122. (*Fig.* 47.) Die allgemeine Aufgabe: „Es seyen zwei in einem Punkte C zusammentreffende gerade Linien gegeben; man soll aus diesem Punkt eine dritte ziehen, welche mit den zwei ersten gleiche Nebenwinkel mache;" wird drei Fälle haben. Es liegen nämlich entweder die zwei gegebenen zusammentreffenden in gerader Linie an einander; oder sie machen einen Winkel mit einander; und im letztern Fall soll die dritte entweder innerhalb dieses Winkels gezogen werden, oder aufserhalb desselben. Wenn sie innerhalb dieses Winkels gezogen werden soll; so heifst das mit andern Worten: der Winkel soll in zwei gleiche Theile getheilt werden; und dieser Fall der Aufgabe ist in I, 9. aufgelöst.

§. 123. Für den Fall, da die gegebenen AC, CB in C geradefort an einander liegen, heifst die Aufgabe: an eine gegebene gerade Linie AB (s. Fig. zu I, 11. in der Uebers.) aus einem auf ihr gegebenen Punkt C eine gerade Linie ziehen, die so auf ihr in diesem Punkt aufstehe, dafs sie die Nebenwinkel einander gleich mache.

„Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern geraden so aufsteht, dafs sie die Nebenwinkel einander gleich macht: so heifst jeder der gleichen Winkel ein rechter;" sagt die 10. Definition.

Hienach wird die Aufgabe so ausgedrückt: „Einer gegebenen geraden Linie aus einem auf ihr gegebenen Punkte eine andere gerade unter rechten Winkeln zie-

hen." Τῃ δοθειση ευθειᾳ απο τε προς αυτῃ δοθεντος σημειε προς ορθας γωνιας ευθειαν γραμμην αγαγειν.

Weiter heiſst es in Def. 10. „Und die [solchergestalt] aufstehende gerade heiſst καθετος, senkrecht, perpendiculär, ein Perpendikel, auf diejenige [oder auf derjenigen], auf welcher sie aufsteht."

Hienach hieſse die Aufgabe: „Auf eine gegebene gerade Linie (oder auf einer gegebenen geraden Linie) aus (oder in) einem auf ihr gegebenen Punkt ein Perpendikel (eine senkrechte) ziehen (errichten).

Das Wort καθετος übrigens gebraucht Euklid für den Fall der folgenden Aufgabe, da auf eine gerade Linie aus einem auſserhalb ihr gegebenen Punkt ein Perpendikel herabgezogen, gefällt, herabgelassen werden soll. (Καθετος, von καθιεναι; eigentlich die herabgelassene.)

§. 124. Analysis. a) (Fig. zu I, 11. in d. Uebers.) Gesetzt es sey CF die auf die AB aus dem auf ihr gegebenen Punkt C unter rechten Winkeln zu ziehende, d. i. so daſs sie die Nebenwinkel FCA, FCB gleich mache; und es sey der Punkt F beliebig als ihr Endpunkt oder als irgend ein Punkt auf ihr genommen. Wenn man nun von diesem irgend zwei andere gerade Linien zu beiden Seiten der FC an die AB zieht, wie die FD, FE: so erhält man zwei Dreiecke FCD, FCE, welche die Seite FC gemeinschaftlich, und den Winkel FCD dem FCE gleich haben.

b) Um nun den Satz I, 4. anwenden zu können, nehme man auch die CD und CE gleich; d. i., man bestimme den Punkt D auf der AB nach Belieben von C gegen A, und den Punkt E von C gegen B so, daſs die CE der CD gleich werde. So haben die Dreiecke FCD, FCE die Seiten DC, CF den Seiten EC, CF gleich, und den Winkel DCF dem ECF gleich (Vorauss.): Folglich ist auch die Grundlinie DF der EF gleich (I, 4.). Das heiſst: wenn die FC auf der AB senkrecht stehen soll; und man nimmt auf ihr irgend einen Punkt F; und auf der AB zu beiden Seiten des Punkts C die Punkte D, E als Endpunkte gleicher Stücke: so müſsen die von F nach D und E gezogene gerade Linien auch gleich seyn. Es kommt also darauf an, einen Punkt F auſser der AB so zu finden, daſs die von ihm nach D und E gezogene gerade Linien einander gleich seyen.

c) Ein solcher Punkt F zu den Punkten D, E läſst sich aber finden, indem man auf der DE ein gleichseitiges Dreieck DFE beschreibt.

Hieraus ergibt sich nun die Euklidische Auflösung. Der Beweis gründet sich auf I, 8. Anderer Beweis durch I, 5. 4.

§. 125. Wäre ein gleichschenklichtes oder gleichseitiges Dreieck FDE gegeben, dessen Grundlinie DE in C halbirt sey; und verlangt, auf diese in C eine gerade Linie senkrecht zu ziehen: so hätte man nur die gerade Linie von C nach F zu ziehen.

Nämlich, wenn in einem gleichschenklichten oder gleichseitigen Dreieck eine gerade Linie von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie des Dreiecks gezogen wird: so steht dieselbe auf der Grundlinie senkrecht. (I, 8.)

Auch „wenn in einem gleichschenklichten oder gleichseitigen Dreieck der Winkel an der Spitze durch eine der Grundlinie begegnende gerade Linie halbirt wird: so steht diese gerade Linie auf der Grundlinie des Dreiecks senkrecht." (I, 4.) So in I, 10. die CD auf der AB.

§. 126. a) In der Analysis §. 124. war der Satz enthalten: „Ein Dreieck, in welchem eine von der Spitze gezogene gerade Linie die Grundlinie senkrecht halbirt (oder dessen Spitze in der geraden Linie liegt, welche seine Grundlinie senkrecht halbirt), ist gleichschenklicht."

b) (*Fig.* 58.) Umgekehrt: „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck ACB ein gerade Linie gezogen wird, die seine Grundlinie senkrecht in D halbirt; so wird sie durch des Dreiecks Spitze C gehen." Denn gienge sie nicht durch C; so würde sie einen der Schenkel treffen; sie treffe den Schenkel BC in E; und man ziehe AE und DC. So wird (nach a) das Dreieck EAB gleichschenklicht seyn. Aber auch das Dreieck CAB ist gleichschenklicht (Vorauss.): Demnach hätten zwei gleichschenklichte Dreiecke auf einerlei Grundlinie AB einen Winkel ABC gemeinschaftlich: welches nicht möglich ist. (§. 62.) Folglich kann die gerade Linie, welche die Grundlinie AB senkrecht halbirt, nicht anders als durch dessen Spitze C gehen.

§. 127. (Fig. 59.) Der noch übrige Fall der allgemeinern Aufgabe §. 122. wäre: „Aus der Spitze A eines gegebenen Winkels BAC eine gerade Linie auſserhalb desselben ziehen, welche mit seinen Schenkeln AB, AC gleiche Nebenwinkel mache."

Man bestimme die AF, wie in I, 9.; und verlängere sie beliebig nach G: so wird die GA die verlangte seyn;

sie wird nämlich die Nebenwinkel GAB, GAC einander gleich machen. Das heifst also: Die nämliche gerade Linie AF, welche an der einen Seite den Winkel BAC halbirt, wird auch, verlängert nach G, an der andern Seite mit den Schenkeln AB, AC gleiche Nebenwinkel machen.

Denn man ziehe von einem beliebigen Punkt G derselben nach den wie in I, 9. bestimmten Punkten D, E gerade Linien GD, GC. Da nun 1) die Seiten DF, FA den Seiten EF, FA gleich sind, und die Grundlinie AD der Grundlinie AE gleich ist: so ist auch (I, 8.) der Winkel DFA dem EFA gleich. Daher 2) da die DF, FG den EF, FG gleich sind, und Winkel DFG=EFG (nach 1): so ist (I, 4.) die GD=GE, und Winkel FGD =FGE. Daher 3) entweder durch I, 4. weil die DG, GA der EG, GA gleich sind, und Winkel DGA=EGA (nach 2); oder durch I, 8. weil die DA, AG den EA, AG, und die DG der EG gleich ist: ist auch der Winkel GAD=GAE.

§. 128. (*Fig.* 60.) Auf ähnliche Art läfst sich erweisen: dafs, „wenn auf einer geraden Linie AB eine andere FC in C senkrecht steht, auch ihre Verlängerung GC an der andern Seite auf der AB senkrecht stehe;" d. i. dafs, wenn die Nebenwinkel FCA, FCB gleich sind, auch die Nebenwinkel GCA, GCB gleich seyn werden. Man ziehe FD, FE und GD, GE. Da nun die DC, EF den EC, CF, und Winkel DCF dem ECF (Def. 10.) gleich sind; so ist auch (I, 4.) FD=FE, und Winkel DFC=EFC. Und hieraus wird auf ähnliche Art wie in §. 127. bewiesen, dafs auch die GD=GE, und Winkel GCD=GCE sey.

§. 129. a. Aber es sey nun die Frage: ob auf einer geraden Linie AB in Einem Punkte C und an einerlei Seite derselben nicht mehr als Eine senkrechte stehen könne?

Es seyen, wenns möglich ist, auf derselben zwei senkrechte CD, CE. (*Fig.* 61. a.) Da nun die CD auf der AB senkrecht ist: so macht sie (Def. 10.) die Nebenwinkel DCA, DCB gleich; mithin ist Winkel DCA >ECB, und noch mehr Winkel ECA >ECB. Da aber auch die EC auf der AB senkrecht steht; so sind die Nebenwinkel ECA, ECB gleich. Der ECA war aber auch gröfser als der ECB; welches nicht möglich ist. Folglich kann nicht auf einerlei gerader Linie AB in einem Punk-

te C derselben und an einerlei Seite mehr als Eine gerade Linie senkrecht stehen.

b. (*Fig.* 61. b.) Wenn auf einer geraden Linie AB in einem Punkt derselben C eine andere CD aufgestellt ist, welche mit der ersten ungleiche Winkel ACD, DCB macht, und in demselben Punkte C ein Perpendikel auf die erste errichtet wird: so wird dieses innerhalb des gröfsern ACD von den ungleichen Winkeln fallen.

Denn wäre dieses nicht: so fiele es entweder auf die CD oder innerhalb des kleinern Winkels DCB. Es kann aber nicht auf die CD fallen: sonst wären (Def. 10.) die Winkel DCA, DCB gleich; die nach der Vorauss. ungleich sind. Auch kann es nicht innerhalb des Winkels DCB fallen, wie die CE: sonst wären (Def. 10.) die Winkel ECA, ECB gleich: Da aber Winkel DCA > DCB (Vorauss.): so ist Winkel DCA > ECB, und noch viel mehr Winkel ECA > ECB, also nicht gleich. Da demnach das Perpendikel weder auf die CD noch innerhalb des Winkels DCB fallen kann: so mufs es innerhalb des Winkels DCA fallen.

§. 130. „Alle rechte Winkel sind einander gleich." Dieser Satz, der in Euklids Elementen als 10s Axiom, oder nach andern Handschriften und Ausgaben, als 4s Postulat gesetzt wird, läfst sich vermittelst des vorherg. §. 129. durch Congruenz so beweisen:

(*Fig.* 62.) Es sey der Winkel BAC ein rechter, und der Winkel EDF ein rechter: so mufs (Def. 10.) eine der geraden BA, AC auf der andern verlängerten so aufstehen, dafs sie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht; es mache also die BA mit der verlängerten CA, d. i. mit der CG die gleichen Winkel BAC, BAG; so steht die BA auf der GG senkrecht. (Def. 10.) Ebenso mache die CD mit der verlängerten FD, d. i. mit der FH die gleichen Winkel EDF, EDH; so steht die ED auf der FH senkrecht. Bringt man nun die CG auf die FH, und den Punkt A auf den Punkt D: so wird die AB auf die DE fallen. Denn fiele sie anders, wie in die Richtung DK: so werden, da die Winkel BAC, BAG gleich sind, auch die Winkel KDF, KDH gleich seyn; also wird auch die KD auf der FH senkrecht stehen. Nun steht aber auch die ED auf der FH senkrecht. Folglich stünden auf einer geraden Linie FH in einem Punkt D, und an einerlei Seite zwei gerade Linien ED, KD senkrecht: welches unmöglich ist (§. 129.). Folglich kann die BA nicht anders als auf die ED fallen. Da nun der Punkt

A auf D, und AC auf DF, AB auf DE liegt: so deckt der Winkel BAC den Winkel EDF, und ist ihm also gleich. Demnach sind alle rechte Winkel einander gleich: w. z. e. w.

§. 131. Der rechte Winkel ist ein Winkel von bestimmter Gröfse, und dient daher zum Maafse der übrigen Winkel.

§. 132. Anwendung von I, 11. bei Aufgaben:

1) Auf eine gegebene gerade Linie eine andere ziehen, welche sie senkrecht halbire.

2) Es sey eine gerade Linie AB, und auf ihr ein Punkt C gegeben: man soll auf ihrem Stück AC ein Dreieck beschreiben, dessen in C sich endigende Seite senkrecht auf AC, und die in A sich endigende der ganzen AB gleich sey. Aufl. mittelst I, 11. u. Post. 3.

3) Auf einer gegebenen Grundlinie AB ein gleichschenklichtes Dreieck beschreibsn, in welchem die von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gehende gerade Linie einer gegebenen C gleich sey. Aufl. mittelst I, 10. 11. und des Satzes §. 126, a.

4) An eine gegebene gerade Linie AB ein gleichschenklichtes Dreieck dergestalt beschreiben, dafs seine Spitze in A sey, seine Grundlinie durch den Punkt B gehe und in demselben halbirt werde (oder die AB auf ihr in B senkrecht stehe), und einer gegebenen geraden Linie C gleich sey.

5) Es sey eine ebene Figur, von einer geraden Linie, welche ihre Grundlinie sey, und von andern geraden oder krummen, oder einer krummen Linie begränzt. Man soll auf der genannten Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen Spitze in den Perimeter der Figur falle.

Namentlich, es sey ein Kreisabschnitt gegeben: man soll auf seiner Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreieck in den Kreisabschnitt einbeschreiben. — Dieses wird gebraucht in III, 30.

6) Von einem gleichschenklichten Dreieck sey Grundlinie und einer der Winkel an ihr gegeben: man soll das Dreieck ausmachen. — Die wird in III, 33. gebraucht: setzt übrigens das 11te Axiom voraus.

Satz XII.

§. 133. Analysis der Aufgabe (*Fig.* zu I, 11. in d. Uebers.) 1) Gesetzt fürs erste, es soll von der Spitze

C eines gegebenen gleichschenklichten Dreiecks CGE eine gerade Line auf die Grundlinie GE senkrecht herabgezogen (ein Perpendikel gefällt) werden. Da vermöge dessen, was schon in §. 125. bemerkt worden, „in jedem gleichschenklichen Dreieck, eine gerade Linie, die den Winkel an der Spitze halbirt, auf der Grundlinie senkrecht steht" (aus I, 4.); und „in jedem gleichschenklichten Dreieck die gerade, die von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie geht, auf dieser senkrecht ist" (aus I, 8.): so wird das Verlangte geschehen, wenn man a) entweder den Winkel an der Spitze GCE durch eine gerade Linie CH halbirt (I, 9.); oder b) die GE im Punkt H halbirt, und die CH zieht: so wird in beiden Fällen die CH auf der Grundlinie GE senkrecht stehen.

2) Auf eine unbegränzte gerade Linie AB aus einem ausser ihr gegegebenen Punkt C wird man demnach ein Perpendikel (eine senkrechte) fällen können, wenn man vorerst ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben kann, das seine Spitze in C, und seine Grundlinie auf (länge) der AB liegen habe. Ein solches Dreieck läfst sich aber beschreiben, wie schon oben in §. 25. bemerkt worden; indem man nämlich aus dem Mittelpunkt C einen Kreis beschreibt, dessen Peripherie die AB in zwei Punkten E, G schneidet; welches geschehen wird, wenn diese Peripherie durch irgend einen an der andern Seite von BC, als an welcher der Punkt C liegt, liegenden Punkt geht; also wenn man an dieser andern Seite irgend einen Punkt D nimmt, und aus dem Mittelpunkt C mit der Weite CD einen Kreis beschreibt. Dieser schneide die AB in E, G (s. Axiome 2te Klasse, Anh. nr. 5.): so ist die Aufg. auf die in 1) reducirt. Hieraus folgt die Construction wie im Texte; und Beweis ebenso.

§. 134. Ob der aus C mit dem Abstand CD beschriebene Kreis die unbegränzte AB nur in zwei Punkten schneide? überhaupt, ob nur Eine senkrechte gerade Linie aus C auf AB gezogen werden könne? wird erst durch I, 16. oder 17. und die Folgerungen aus I, 19. entschieden.

§. 135. Aufgabe (deren Auflösung in I, 12. enthalten): Es sey eine gerade Linie AB, und ausser ihr zwei Punkte C, D an verschiedenen Seiten von ihr gegeben: man soll auf ihr einen Punkt dergestalt finden,

dafs die von C nach ihm gezogene gerade Linie der von C nach D gezogenen gleich werde.

Anwendungen der Aufgabe I, 12. kommen vor in II, 12. 13., wo von der Spitze eines Dreiecks auf seine Grundlinie ein Perpendikel gefällt wird; das in gewifsen Fällen aufserhalb, in andern innerhalb des Dreiecks fällt, oder auch mit einer seiner Seiten zusammenfällt: in III, 14. 15., wo vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine gerade Linie im Kreis ein Perpendikel gefällt wird, das innerhalb des Kreises fallen mufs, wie sich beweisen läfst; ebenso in III, 16. 18.; in IV, 4., wo von einem innerhalb eines Dreiecks bestimmten Punkte ein Perpendikel auf eine Seite gefällt wird, u. a. a. O.

Satz XIII.

§. 136. (Fig. zu I, 13. in d. Uebers.) Eine gerade Linie AB, die auf einer andern CD in B aufsteht, macht mit ihr entweder gleiche oder ungleiche Nebenwinkel ABC, ABD.

Macht sie mit ihr gleiche: so heifst jeder derselben ein rechter, und die AB auf der CD senkrecht, nach Def. 10.

Macht sie aber ungleiche; so läfst sich (nach I, 11.) eine von B aus an derselben Seite ziehen, die gleiche, d. i. rechte macht, oder auf der CD senkrecht steht: es sey die EB.

Nun besteht der Winkel DBA, aus den zweien DBE, EBA: folglich sind die zwei DBA, ABC, den dreien DBE, EBA, ABC gleich.

Wiederum besteht der Winkel CBE aus den zweien CBA, ABE. Folglich sind die zwei CBE, EBD den dreien CBA, ABE, EBD gleich.

Demnach sind die zwei DBA, ABC und die zwei CBE, EBD, da beide Paare den nämlichen drei DBE, EBA, ABC zusammen gleich sind, einander gleich. Die letztern zwei sind aber zwei rechte. Folglich sind die ersteren zwei, nämlich die Winkel DBA, ABC zusammen zweien rechten gleich.

§. 137. Oder: der Winkel ABD ist gröfser als der rechte Winkel EBD um den Winkel ABE. Der Winkel ABC ist kleiner als der rechte EBC um den nämlichen Winkel EBA. Da demnach von den Winkeln ABC, ABD der eine um so viel gröfser, als der andere kleiner als

ein rechter ist: so sind sie zusammen zwei rechten gleich.

§. 138. In diesen Beweisen ist wiederum enthalten: Wenn auf einer geraden Linie CD in einem Punkte B und an einerlei Seite derselben zwei gerade Linien EB, AB aufgestellt sind, von welchen die eine EB gleiche Nebenwinkel macht, oder senkrecht auf der ersten steht: so macht die andere AB ungleiche Nebenwinkel, oder steht schief auf der ersten. Daher können auf einer geraden Linie CD in einem Punkt B und an einerlei Seite derselben nicht mehr als eine gerade Linie senkrecht stehen; wie dieses schon in §. 129. dargethan worden ist.

§. 139. (*Fig.* 63.) „Wenn eine gerade Linie AB auf einer andern CB senkrecht steht: so steht auch die zweite CB auf der ersten AB senkrecht. Und jeder der beiden Nebenwinkel ABD, CBE eines rechten Winkels ABC, die durch Verlängerung des einen oder des andern seiner Schenkel entstehen, ist ihm gleich und ein rechter." — Es stehe die AB auf der CB senkrecht, also so (Def. 10.), dafs, wenn die CB nach D verlängert wird, die AB mit ihr die Nebenwinkel ABC, ABD gleich mache. Und man verlängere auch die AB nach E. Wäre nun der Winkel CBE dem Winkel CBA nicht gleich, da CBA ein rechter ist (Vorauss.), und alle rechte einander gleich sind (§. 130.): so wäre er gröfser oder kleiner als ein rechter; und also die Winkel CBA, CBE zusammen (Ax. 4.) gröfser oder kleiner als zwei rechte. Sie sind aber zwei rechten gleich, nach I, 13. Folglich kann der Winkel CBE dem CBA nicht ungleich seyn; er ist ihm also gleich, und mithin (Def. 10.) auch ein rechter, und die CB auf der AE oder AB senkrecht.

§. 140. Wenn ein Winkel ein stumpfer ist, das ist, gröfser als ein rechter; und man verlängert einen seiner Schenkel: so ist der dadurch entstehende Nebenwinkel kleiner als ein rechter, d. i. ein spitziger. Und umgekehrt: wenn ein Winkel spitzig ist, so ist sein Nebenwinkel stumpf.

§. 141. Anwendungen des Satzes I, 13. Aus diesem folgt, was §. 95. von den Winkeln an und unter der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks bemerkt worden: dafs, wenn die einen einander gleich sind, auch die andern einander gleich sind; ferner was §. 127. bemerkt worden: dafs, wenn eine gerade Linie einen Winkel halbirt, sie auch verlängert an der andern Seite mit den Schenkeln desselben gleiche Nebenwinkel

macht; überhaupt: dafs, wenn zwei Winkel einander gleich sind, ihre durch Verlängerung des einen Schenkels eines jeden entstehenden Nebenwinkel auch einander gleich sind. Denn das eine dieser Paare von Nebenwinkeln ist so grofs als das andere Paar, jedes nämlich 2 rechten gleich (I, 13.): da nun der eine dem einen gleich ist (Voraussetzung); so ist auch der übrige dem übrigen gleich. — Daher ferner, wenn eine gerade Linie auf einer andern senkrecht steht, so steht auch ihre Verlängerung an der andern Seite auf dieser andern senkrecht.

Ferner a) (*Fig.* 64.) „Jeder innere Winkel eines Dreiecks ist kleiner als zwei rechte." Es sey BAC irgend ein innerer Winkel eines Dreiecks. Wenn nun irgend eine Seite eines Dreiecks verlängert wird: so fällt die Verlängerung aufserhalb des Dreiecks (S. zu d. Axiomen zweiter Klasse. Anhang. Nr. 4)). Man verlängere die BA über A hinaus nach D: so fällt also die AD aufserhalb des Dreiecks; und es ist CA eine gerade Linie, die auf der BD in A aufsteht; sie macht also die Winkel BAC, CAD entweder zwei rechte, oder zweien rechten gleich (I, 13.): Mithin ist der Winkel BAC allein, kleiner als zwei rechte.

b) (*Fig.* 65.) „Wenn auf den Schenkeln eines Winkels BAC irgend zwei Punkte B, C angenommen, und durch eine gerade Linie verbunden werden: so fällt diese innerhalb des Winkels." — Denn sie kann nicht durch A gehen, sonst lägen BA und AC geradefort an einander, da sie doch einen Winkel machen; oder schlöfsen zwei gerade Linien von B nach A, oder von C nach A einen Raum ein; welches unmöglich ist. (Ax. 12.)

Auch kann sie nicht aufserhalb des Winkels fallen, wie BEDC: sonst hätte man ein Dreieck, dessen Seiten BA oder CA über A hinaus verlängert, innerhalb des Dreiecks fallen würden; welches unmöglich ist (Ax. zweyte Klasse. Anhang. Nr. 4)). Oder: Man verlängere BA nach D, CA nach E; so hätte man ein Dreieck, dessen innerer Winkel bei A aus den drei Winkeln BAE, EAD, DAC bestünde. Nun sind die Winkel BAE, EAD = 2 rechten (I, 13.): Folglich sind die drei Winkel BAE, EAD, DAC zusammen > 2 rechte. Man hätte also ein Dreieck, in welchem einer seiner innern Winkel gröfser als 2 rechte wäre; welches unmöglich ist. (a.)

§. 142. a. Wenn aus der Spitze A eines Winkels BAC eine gerade Linie so gezogen ist, dafs die zwei Schenkel AB, AC an verschiedenen Seiten derselben liegen: so macht sie, wenn sie innerhalb des Winkels gezogen ist, die Nebenwinkel mit diesen Schenkeln zusammen kleiner als zwei rechte; wenn sie aber aufserhalb des Winkels gezogen ist, gröfser als zwei rechte:

1) (*Fig.* 66, a.) Sie sey innerhalb des Winkels BAC gezogen, wie die AD. Man verlängere die BA nach F. Da nun die BA, AC an verschiedenen Seiten der AD liegen (Vorauss.): so wird der BA Verlängerung AF an der nämlichen Seite der AD mit der AC liegen, und der Winkel DAF gröfser seyn als der DAC; daher auch die Winkel BAD, DAF zusammen gröfser als die BAD, DAC. Aber die BAD, DAF sind =2 rechten (I, 13.). Folglich sind die Winkel BAD, DAC kleiner als 2 rechte.

2) (*Fig.* 66, b.) Sie sey aufserhalb des Winkels BAC gezogen, wie die AE: und man verlängere die BA nach F. Und da die BA, AC an verschiedenen Seiten der EA liegen (Vorauss.): so liegt der BA Verlängerung AF an der nämlichen Seite der EA, wie die AC; und der Winkel EAC ist gröfser als der Winkel EAF. Man nehme den gemeinschaftlichen Winkel BAE hinzu: so sind die Winkel BAE, EAC gröfser als die BAE, EAF. Diese letzteren sind aber =2 rechten (I, 13.). Folglich sind die Winkel BAE, EAC, das ist die Nebenwinkel, welche die EA mit AB, AC macht, gröfser als 2 rechte.

b. Wenn aus der Spitze A eines Winkels BAC eine gerade Linie so gezogen ist, dafs die zwei Schenkel AB, AC an verschiedenen Seiten derselben liegen: so mufs sie, wenn sie mit diesen Schenkeln die Nebenwinkel kleiner als zwei rechte macht, innerhalb des ersten Winkels fallen; wenn sie sie aber gröfser als zwei rechte macht, aufserhalb.

1) (*Fig.* 67, a.) Es sey die AD gezogen, so dafs die Schenkel AB, AC an verschiedenen Seiten von ihr liegen, und dafs sie mit ihnen die Nebenwinkel kleiner als zwei rechte mache: so wird die AD innerhalb des Winkels BAC fallen. Denn fiele sie aufserhalb desselben; so wären (nach a, 2.) die Winkel DAB, DAC gröfser als zwei rechte. Sie sind aber kleiner (Vorauss.): Folglich kann die AD nicht aufserhalb des Winkels BAC fallen: sie fällt also innerhalb. Denn auf einen seiner Schenkel kann sie auch nicht fallen, weil vorausgesetzt

wird, dafs die Schenkel an der einen oder der andern Seite von ihr liegen, und sie mit denselben Winkel macht.

2) (*Fig.* 67, b.) Es sey die AE gezogen, und sie mache mit den Schenkeln AB, AC die Nebenwinkel zusammen gröfser als zwei rechte: so wird die AE aufserhalb des Winkels BAC fallen. Denn fiele sie innerhalb: so wären jene zwei Nebenwinkel zusammen kleiner als zwei rechte. (nach a, 1.)

Dieser Satz (b) wird zu dem Philonischen Beweis des Satzes 8. als Prämisse gebraucht: s. nachher §. 148.

c. (*Fig.* 67, c.) „Wenn zwei Nebenwinkel BAC, CAD gröfser als zwei rechte sind: so machen ihre nicht gemeinschaftliche Schenkel BA, DA einen Winkel mit einander, der an der andern Seite eines jeden von ihnen liegt, als der Winkel, welchen dieser Schenkel mit dem gemeinschaftlichen Schenkel macht."

Denn machten die BA, AD nicht einen Winkel mit einander, der an der andern Seite der BA liegt als der Winkel BAC: so machten sie entweder gar keinen Winkel mit einander, sondern lägen geradefort aneinander; oder der Winkel BAD, den sie machen, läge an einerlei Seite der BA, wie der Winkel BAC. Sie können aber nicht geradefort aneinander liegen; denn sonst wären die Winkel BAC, CAD zusammen zwei rechten gleich (I, 13.): das sind sie aber nicht. Auch kann der Winkel BAD nicht an der nämlichen Seite von BA liegen, wie der Winkel BAC: sonst wären, wenn man die BA nach E verlängert, die Winkel BAC, CAE zusammen zwei rechten gleich (I, 13.): also die Winkel BAC, CAD $<$ 2 rechte: das sind sie aber nicht. Folglich müfsen die BA, AD einen Winkel mit einander machen, der an der andern Seite von BA liegt, als an welcher der Winkel BAC liegt. Und ebenso läfst sich zeigen, dafs der Winkel DAB an der andern Seite der DA liegt, als an welcher der Winkel DAC liegt.

Auch „wenn zwei Nebenwinkel gröfser als zwei rechte sind: so liegt von deren nicht gemeinschaftlichen Schenkeln ein jeder an derjenigen Seite des andern, an welcher der gemeinschaftliche Schenkel nicht liegt."

§. 143. Von mehr als zwei Nebenwinkeln, und von Nebenwinkeln um einen Punkt herum.

a) (*Fig.* 68.) Wenn unter den Schenkeln mehrerer an einer Spitze B liegender Nebenwinkel (in einer Ebene) zwei sind, BC, BD, die in einer geraden Linie CD an

einander liegen, die übrigen Schenkel aber alle an einerlei Seite von dieser: so heißen diese Nebenwinkel Nebenwinkel auf Einer geraden Linie CD. Und sie sind alle zusammen zwei rechten gleich.

Denn alle übrigen übrigen außer dem Winkel ABC, welches der erste an BC liegende Winkel sey, sind zusammen dem Winkel ABD gleich. Also alle die Nebenwinkel zusammen, vom Winkel CBA an mit allen folfolgenden, sind den Winkeln CBA, ABD gleich: diese aber sind = 2 rechten (I, 13.). Folglich sind alle die gedachten Nebenwinkel, d. i. alle die Nebenwinkel um Punkt B auf der geraden CD 2 rechten gleich.

b) (*Fig.* 69.) Wenn unter den Schenkeln mehrerer an einer Spitze B liegender Nebenwinkel keiner ist, der verlängert alle übrigen Schenkel an Einer Seite von ihm liegen hätte: so heißen diese Nebenwinkel Nebenwinkel um den Punkt B herum. Und sie sind zusammen vier rechten gleich.

Man nehme irgend einen Schenkel CB, und entweder sey ein anderer Schenkel BD, der mit ihm gerade fort liege, oder verlängere man den CB nach D. Nun befinden sich (nach der Voraus.) an beiden Seiten der CD Schenkel und Winkel: es seyen BF, BG die nächsten Schenkel an BD zu beiden Seiten der CD. Nun sind die Winkel DBF und alle mit ihm an einer Seite der CD liegenden, als Nebenwinkel auf der geraden Linie CD, 2 rechten gleich (nach a.). Ebenso der Winkel DBG und alle auf der andern Seite der CD liegenden sind = 2 rechten. Folglich sind die ersten und die zweiten genannten zusammen = 4 rechten. Die ersten und die zweiten genannten zusammen aber machen die Nebenwinkel um den Punkt B herum aus. Also sind die Nebenwinkel um den Punkt B herum = 4 rechten.

c) (*Fig.* 70.) Wenn unter den Schenkeln mehrerer an einer Spitze B liegender Nebenwinkel einer ist, CB, der verlängert alle übrigen Schenkel an einer Seite von ihm liegen hat: so machen die zwischen dem genannten Schenkel CB als dem einen äußersten und dem andern äußersten BF eingeschlossenen Winkel noch nicht alle Nebenwinkel um den Punkt B herum aus. Gedenkt man sich aber den Winkel, den der eine äußerste Schenkel FB mit der Verlängerung BH des andern, und denjenigen, den die Verlängerung BH des andern mit der Verlängerung BI des ersten, und denjenigen, den die Verlängerung BI des ersten mit dem andern äußersten

Schenkel BC einschliefst, diese drei Winkel zusammen FBH, HBI, IBC als Einen Winkel (welcher gröfser als zwei rechte ist, und ein convexer heifst, zum Unterschied von den gewöhnlichen Winkeln, den concaven); und nimmt diesen convexen Winkel zu den übrigen Nebenwinkeln hinzu: so sind alle diese Nebenwinkel um den Punkt B herum zusammen 4 rechten gleich.

Denn die Winkel CBF, FBH sind = 2 rechten (I, 13.): ebenso die Winkel HBI, IBC. Also die Winkel CBF, FBH, HBI, IBC zusammen gleich = 4 rechten. Von diesen machen die drei letzteren FBH, HBI, IBC den einzigen convexen FBC aus, von welchem gesagt worden; der erstere CBF aber macht die Summe aller concaven aus, und diese concave alle mit jenem convexen machen die Nebenwinkel um den Punkt B herum aus. Folglich sind diese Nebenwinkel um dem Punkt B herum = 4 rechten.

Namentlich sind auch zwei Nebenwinkel um einen Punkt, wie der concave CBF und der concave FBC, zusammen 4 rechten gleich.

Satz XIV.

§. 144. Ist Converse des 13ten. Auch lassen sich, wie bei diesem, zwei Fälle unterscheiden.

§. 145. Den ersten Fall betreffend:

a) (*Fig.* 71.) Wenn eine gerade Linie AB auf einer andern BC in ihrem Endpunkt B aufsteht, und mit ihr einen rechten Winkel ABC macht; und der letzern CB in diesem Endpunkt B eine andere angesetzt wird, die also auf die andere Seite der ersten AB fällt; so macht die erstere AB mit ihr, wenn sie geradefort angesetzt ist, ebenfalls einen rechten Winkel, wenn sie aber nicht geradefort angesetzt ist, einen spitzigen oder stumpfen.

Die BD sey der CB geradefort angesetzt; also CD eine gerade; und da der Winkel ABC ein rechter ist (Voraus.), so ist auch (Def. 10. und §. 139.) der Winkel ABC ein rechter. — Nun sey BE nicht geradefort angesetzt: so ist offenbar der Winkel ABE gröfser oder kleiner als der ABD, d. i. als ein rechter; mithin stumpf oder spitzig.

b) Daher umgekehrt: wenn die aufstehende AB mit der angesetzten BD ebenfalls einen rechten Winkel macht, wie mit der ersten CB: so mufs die angesetzte BD geradefort an der ersten CB liegen. Denn läge sie

nicht so: so würde die AB mit ihr einen andern als rechten Winkel machen. (a.)

Anderer Ausdruck: „Wenn an einer geraden Linie AB und an einem Punkt B derselben, aber auf verschiedenen Seiten von ihr, zwei gerade Linien CB, BD so liegen, daſs die zwei Nebenwinkel ABC, ABD, welche die erstere AB mit ihnen macht, beide rechte sind: so liegen die zwei letztern geraden Linien BC, BD geradefort an einander." Oder „wenn eine gerade Linie AB auf zweien an verschiedenen Seiten von ihr liegenden BC, BD in einem Punkte B senkrecht steht: so liegen diese geradefort aneinander."

Dieses ist ein specieller Fall von I, 14., und wird gebraucht im Beweise von I, 47.

§. 146. (*Fig.* 72.) Allgemeiner: a) Wenn eine gerade Linie AB auf einer andern BC in ihrem Endpunkt B aufsteht, und der letztern in eben diesem Endpunkt eine andere BD oder BE angesetzt wird, die auf die andere Seite der ersten AB fällt: so macht die erste AB mit der andern CB und der angesetzten BD, wenn diese geradefort angesetzt ist, zwei Nebenwinkel, die zusammen zweien rechten gleich sind (vermöge I, 13.): ABC, ABD; wenn diese aber nicht geradefort angesetzt ist, wie die BE, zwei Nebenwinkel ABC, ABE, die zusammen gröſser oder kleiner als zwei rechte sind. (Letzteres folgt aus dem ersteren durch Ax. 9. u. 4.)

b) Daher umgekehrt: Wenn die erste AB mit der andern CB und der angesetzten BD zwei Nebenwinkel macht, die zusammen zwei rechten gleich sind: so wird die angesetzte an der andern geradefort liegen. Denn läge sie nicht so: so wären jene zwei Nebenwinkel gröſser oder kleiner als zwei rechte. (a)

Anderer Ausdruck. „Wenn an einer geraden Linie (AB) und einem Punkte (B) derselben, aber an verschiedenen Seiten von ihr, zwei gerade Linien (CB, BD) liegen, welche mit ihr die Nebenwinkel (ABC, ABD) zwei rechten gleich machen: so werden die zwei letztern geraden Linien (CB, BD) geradefort an einander liegen." Dieſs der Satz I, 14.: den Beweis des Textes haben wir nur mit einer kleinen Wendung vorgetragen.

§. 147. Wie für zwei Nebenwinkel mittelst I, 13. und Ax. 9., so wird mittelst §. 143, a. und Ax. 9. der allgemeinere Satz bewiesen: „Wenn zwei oder mehrere Nebenwinkel (in einer Ebene) zusammen zweien rechten Winkeln gleich sind: so fallen ihre nicht gemein-

schaftlichen Schenkel in Eine gerade Linie zusammen; oder so ist einer dieser Schenkel die Verlängerung des andern.

§. 148. Anwendungen von I, 14. Erstlich bei dem Philonischen Beweis des Satzes I, 8. (§. 102.)

(*Fig.* 73.) Es seyen die Dreiecke ABC, DEF, in welchen die Seiten BA, AC den Seiten ED, DF, und die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich sey. Man bringe das Dreieck ABC so an das Dreieck DEF, dass die BC die EF decke, da sie ihr gleich ist; das Dreieck ABC aber in die andere Seite von EF falle; und es bekomme die Lage von EFG. Nun sind die Winkel BCB, DFE entweder = 2 rechten, oder gröfser oder kleiner.

Fall I. (*Fig.* 73. a.) Sie seyen = 2 rechten, also auch die Winkel DFE, EFG=2 rechten; so liegen DF, FG in gerader Linie an einander. (I, 14.) Und da ED, EG gleich sind; so sind (I, 5.) die Winkel EDF, EGF gleich; d. i. Winkel EDF=BAC.

Fall II. (*Fig.* 73, b.) Sie seyen < 2 rechte; also auch die Winkel DFE, EFG < 2 rechte; mithin (§. 142.) fällt die FE innerhalb des Winkels DFG: Man ziehe die DG. So stehen zwei gleichschenklichte Dreiecke DEG, DFG auf der gemeinschaftlichen Grundlinie DG, und an verschiedenen Seiten derselben: also sind die von ihren Schenkeln eingeschlossenen Winkel EDF, EGF gleich (§. 68.), d. h. der Winkel BAC ist = EDF.

(*Fig.* 73, c.) Fall III. Es seyen die Winkel BCA, EFD, und mithin auch die Winkel EFG, EFD, gröfser als Zwei rechte: so fällt die FE aufserhalb des Winkels DFG (§. 142.); und wenn man die DG zieht; so hat man zwei gleichschenklichte Dreiecke EDG, FDG auf der nämlichen Grundlinie DG: Folglich (§. 68.) machen ihre Schenkel die Winkel EDF, EGF gleich; daher auch Winkel BAC=EDF.

Ueber diesen Philonischen Beweis des Satzes I. 8. ist in Absicht auf die dabei vorkommende Unterscheidung der verschiedenen Fälle, wie die DG in Beziehung auf die FE fallen kann, welche nach Proclus (Chrest. geom. p. 233. a.) dargestellt, und nur, wie dieselbe von der verschiedenen Beschaffenheit der Winkel ACB, DFE abhange, hinzugesetzt worden ist, zu bemerken:

a) dass, da im Euklidischen System der Satz I, 13. den Satz I, 11., dieser aber den Satz I, 8. voraussetzt, hiemit die Unterscheidung der dreierlei Fälle in ihren

Gründen mittelbar auf I, 8. beruht, welcher erst bewiesen werden soll. Zwar könnte man, wie §. 124. bemerkt worden, den Beweis von I, 11. ohne I, 8. durch I, 5, 4, führen.

2) (*Fig.* 73, d. e.) dafs im Fall II. wiederum möglich wäre, dafs die DG auch mit DE, EG in eine gerade Linie zusammen fiele, oder dafs die EF aufserhalb des Winkels DEG fiele. Die Unterscheidung der Fälle müfste also vielmehr so gemacht werden: Entweder ist von den zwei Paaren Winkel ACB, DFE, und ABC, DEF das eine $=2$ rechten, oder das eine >2 rechte, oder beide <2 rechte. In den beiden ersten Fällen ist nämlich das andere Paar <2 rechte, vermöge des Satzes I, 17.; welcher also bei dieser Unterscheidung der Fälle vorausgesetzt werden müfste.

§. 149. (*Fig.* 74.) „Wenn auf einerlei Grundlinie AB an verschiedenen Seiten derselben zwei gleichschenklichte Dreiecke ACB, ADB stehen: so liegen ihre Spitzen C, D und der Halbirungspunkt E der Grundlinie AB in Einer geraden Linie."

Man ziehe die CE, DE: so stehen beide auf der AB senkrecht (§. 125.); also ist jeder der Winkel AEC, AED ein rechter; mithin liegen (I, 14. oder §. 145.) die CE, DE geradefort aneinander.

Andere Beweise für diesen Satz, wie auch für den Fall, da die Dreiecke an einerlei Seite der Grundlinie stehen, s. Chrestom. geom. S. 331—333.

§. 150. Andere Anwendungen von I, 14., die keinen der folgenden Sätze voraussetzen, finden sich in Chrest. geom.

S. 334. u. fg. nr. 28. „Wenn auf Einer Grundlinie an verschiedenen Seiten —

S. 343. f. „Wenn von den Schenkeln eines Winkels —

S. 343. g. „Wenn von den Endpunkten gleicher Schenkel —

§. 344. i. „Wenn von einem Punkt innerhalb eines Winkels —

§. 371. c.) „Wenn auf einer geraden Linie in ihren Endpunkten —

§. 151. Weitere Anwendungen von I, 14.

A, 1) (*Fig.* 75.) „Wenn eine gerade Linie EF zwei andere AB, CD senkrecht in E, F halbirt, und mit der die an einer Seite von ihr liegenden Endpunkte A, C der beiden letztern verbindenden geraden Linie AC verlängert in einem Punkt G zusammentrifft: so trifft sie

auch mit der die übrigen Endpunkte B, D verbindenden BD verlängert im nämlichen Punkt G zusammen."

Man ziehe AF, FB. Da nun die AB in E durch die FE senkrecht halbirt ist, so ist die AE=EB, und der Winkel AEF=FEB (Def. 10.). Da demnach die zwei AE, EF den zweien BE, EF gleich, und Winkel AEF =BEF; so ist (I, 4.) die AF=BF, und Winkel AFE =BFE. Man nehme diese von den Winkeln EFC, EFD, welche ebenfalls gleich sind, weil die EF auf der CD senkrecht steht, hinweg: so sind auch die übrigen AFC, BFD gleich (Ax. 3.). Es ist aber auch die CF=FD. Da demnach die zwei AF, FC den zweien BF, FD, und der Winkel AFC dem BFD gleich ist: so ist (I, 4.) Winkel ACF=BDF.

Man ziehe nun die DG. Und da die CD durch die EF in F senkrecht halbirt, und die EF nach G verlängert ist (Vorauss.): so sind auch die Winkel CFG, DFG gleich (§. 141.). Da demnach die zwei CF, FG den zweien DF, FG, und der Winkel CFG dem DFG gleich ist; so ist auch (I, 4.) Winkel FCG=FDG.

Es ist aber auch gezeigt worden, dafs Winkel ACF =BDF. Folglich sind (Ax. 2.) die Winkel ACF, FCG den Winkeln BDF, FDG zusammen gleich. Nun sind aber die Winkel ACF, FCG zweien rechten gleich (I, 13.), weil AG eine gerade Linie ist, auf der die CF aufsteht. Folglich sind auch die Winkel BDF, FDG zweien rechten gleich; und daher (I, 14.) liegen FD, DD geradefort aneinander, oder die BD verlängert trifft auf den Punkt G. w. z. e. w.

Anderer Ausdruck: Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten durch eine gerade Linie senkrecht halbirt werden, und diese mit einer der übrigen Seiten verlängert zusammentrifft: so trifft sie auch mit der übrigen Seite verlängert in ebendemselben Punkte zusammen.

2) (Converse.) „Wenn eine gerade Linie EF zwei andere AB, CD senkrecht halbirt, und die je zwei an einerlei Seite von ihr liegende Endpunkte der beiden letztern verbindenden geraden Linien AC, BD in einem Punkte G zusammentreffen: so trifft auch die erste gerade Linie EF verlängert auf denselben Punkt G." — Oder: „Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten durch eine gerade Linie senkrecht halbirt werden, und die zwei übrigen Gegenseiten verlängert in einem Punkte zusammenstofsen: so geht auch die genannte gerade Linie verlängert durch denselben Punkt."

Es läfst sich nämlich, wie vorhin, zeigen, dafs der Winkel ACD dem BDC gleich sey. Und da die AC, BD verlängert in G zusammentreffen: so sind in dem Dreieck GCD die Winkel unter der Grundlinie gleich; folglich (nach I, 6. u. Anm. dazu §. 93.) die CG, DG gleich. Man ziehe die FG: so sind die CF, FG den DF, FG, und die CG der DG gleich: folglich (I, 8.) auch der Winkel CFG dem DFG gleich, also rechte. Und da auch Winkel EFD ein rechter ist: so liegen EF, FG geradefort aneinander (I, 14.) oder die EF verlängert trifft auf G.

3. Mit etwas veränderter Bedingung:

„Wenn in einem Viereck AB, DC zwei Gegenseiten AC, BD einander gleich sind, und mit einer der übrigen Seiten gleiche Winkel einschliefsen, und verlängert, an einer Seite zusammentreffen: so liegt der Punkt G, in welchem sie zusammentreffen, und die Halbirungspunkte E, F der übrigen Gegenseiten in gerader Linie.

B, 1. (*Fig.* 76.) „Wenn eine gerade Linie EF zwei andere AB, CD senkrecht halbirt, und zwei an verschiedenen Seiten von ihr liegende Endpunkte A, D der letzteren durch eine gerade Linie AD verbunden werden: so geht durch deren Durchschnitt G mit der ersten EF, auch die die beiden übrigen Endpunkte B, C verbindende gerade Linie BC."

Oder „wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten durch eine gerade Linie senkrecht halbirt werden, und diese von einer Diagonale durchschnitten wird: so geht auch seine andere Diagonale durch denselben Durchschnittspunkt."

2. Converse. Wenn eine gerade Linie EF zwei andere AB, CD senkrecht halbirt, und von diesen je zwei an verschiedenen Seiten der ersten liegende Endpunkte, A und D, B und C, durch gerade Linien AD, BC verbunden werden: so liegt deren Durchschnittspunkt G in der ersten geraden Linie EF."

Oder „wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten durch eine gerade Linie senkrecht halbirt werden: so liegt in dieser der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen.

3. Mit etwas veränderter Bedingung:

Wenn in einem Viereck ABDC zwei Gegenseiten AC, BD einander gleich sind, und mit einer der übrigen Seiten gleiche Winkel einschliefsen: so liegen der Durchschnittspunkt G ihrer Diagonalen AD, BC, und die

Halbirungspunkte E, F der übrigen Gegenseiten AB, CD in einer geraden Linie.

Andere Anwendungen von I, 14. kommen in den Conversen des folgenden I, 15. vor §. 156.

Satz XV.

§. 152. Beweis. Wenn man einen Schenkel eines Winkels verlängert, so entsteht ein Nebenwinkel desselben; und wenn man den andern Schenkel verlängert, ein anderer Nebenwinkel. Diese zwei Nebenwinkel sind einander gleich; denn der eine, wie der andere, macht mit dem anfänglichen Winkel zwei rechte aus. Jede zwei Scheitelwinkel sind aber nichts anders als solche zwei Nebenwinkel eines nämlichen Winkels. Folglich sind jede zwei Scheitelwinkel einander gleich.

§. 153. Dafs „gleicher Winkel Nebenwinkel (welche durch Verlängerung eines der Schenkel eines jeden entstehen) einander gleich seyen," ist §. 141. als Folgerung von I, 13., und in §. 57. nach Borelli als durch Congruenz erweislich bemerkt worden.

Anwendung hievon kann man machen beim Beweis des Satzes: „Wenn auf einer Grundlinie an einerlei Seite derselben zwei gleichschenklichte Dreiecke stehen: so halbirt die gerade Linie, die ihre Spitzen verbindet, fortgezogen die beiden Winkel an den Spitzen."

§. 154. Anderer Ausdruck des Satzes XV. „Wenn die beiden Schenkel eines Winkels über dessen Spitze hinaus verlängert werden: so schliefsen die Verlängerungen mit einander einen dem ersten gleichen Winkel ein."

Scheitelwinkel heifsen, wenigstens im Falle des Satzes XV., solche, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, und deren Schenkel, je einer mit einem, in gerader Linie liegen. Allgemeiner solche, welche einerlei Spitze, den einen Schenkel mit dem einen gerade fort aneinander, und die übrigen Schenkel an verschiedenen Seiten der ersten liegend haben: oder solche, welche zwei eine dritte in einem Punkte berührende und an verschiedenen Seiten von ihr liegende gerade Linien mit den zwei verschiedenen Abschnitten dieser dritten machen. Noch allgemeiner solche, welche zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien mit zweien andern in demselben Punkte zusammentreffenden, von welchen überdiefs jede der ersten an ver-

schiedenen Seiten jeder der andern, und jede der andern an verschiedenen Seiten jeder der ersten liegt, — je eine mit einer, machen.

§. 155. Anderer Beweis des Satzes XV. durch I, 4. 5.

(*Fig.* 77.) Es schneiden die geraden Linien AB, CD einander in E. Man schneide die vier Stücke EA, EC, EB, ED einander gleich ab, und ziehe AC, CB, BD, DA. Da nun die EA, EC einander gleich sind: so sind (I, 5.) die Winkel EAC, ECA einander gleich. Auch werden die ganzen AB, CD einander gleich seyn (Ax. 2.). Demnach sind die zwei BA, AC den zweien DC, CA gleich, und der Winkel BAC dem Winkel DCA: daher auch (I, 4.) die BC der DA, und der Winkel ABC dem Winkel CDA gleich. Da demnach die zwei CB, BE den zweien AD, DE, und der Winkel CBE dem ADE gleich ist; so ist auch (I, 4.) der Winkel BEC dem AED gleich; und dieses sind Scheitelwinkel. Ebenso läfst sich beweisen, dafs auch die Scheitelwinkel AEC, BED gleich sind.

§. 156. Der Satz XV. sagt in Beziehung auf die Figur:

(Fig. zu I, 15. in der Uebers.) Wenn AE und EB in gerader Linie an einander liegen, und CE und ED ebenso: so sind die Winkel AEC, DEB einander gleich, und die Winkel AED, CEB ebenfalls.

Hieraus lassen sich folgende Conversen machen:

1) Mit Beibehaltung einer Bedingung, und Zuziehung einer der Folgen als zweiter Bedingung: Wenn AE, EB in gerader Linie an einander liegen, und der Winkel AEC dem DEB gleich ist: so liegen auch CE, ED in gerader Linie an einander; und der Winkel BEC ist auch dem Winkel AED gleich.

2) Indem man beide Folgen zu Bedingungen macht: wenn der Winkel AEC dem DEB, und der Winkel AED dem BEC gleich ist: so liegen AE, EB in gerader Linie an einander, und CE, ED ebenfalls.

Beweis der Converse 1): Da der Winkel AEC dem DEB gleich ist: so sind, wenn man den gemeinschaftlichen CEB hinzunimmt, die Winkel AEC, CEB den Winkeln CEB, BED gleich. Aber die Winkel AEC, CEB sind zweien rechten gleich, weil es Winkel sind, welche die auf der geraden AB aufstehende CE mit ihr macht (I, 13.). Folglich sind auch die Winkel CEB, BED zweien rechten gleich, und dieses sind die Winkel, welche die BE in E mit den zwei an verschiedenen

Seiten von ihr liegenden CE, ED machen. Folglich liegen (nach I, 14.) auch die CE, ED in gerader Linie an einander; und daher sind auch (I, 15.) die Scheitelwinkel BEC, AED gleich.

(Beweis der Converse 2): Da der Winkel AEC=BED, und Winkel CEB=DEA: so sind (Ax. 2.) die Winkel AEC, CEB den Winkeln BED, DEA zusammen gleich, und mithin die Hälfte von den vier Winkeln AEC, CEB, BED, DEA zusammen. Wiederum da der Winkel CEB =DEA, und Winkel BED=AEC: so sind die Winkel CEB, BED den Winkeln DEA, AEC zusammen gleich, und mithin die Hälfte von den vier Winkeln CEB, BED, DEA, AEC zusammen. Die vier Winkel zusammen aber sind, als die Winkel um einen Punkt E herum, vier rechten gleich (§. 143, b)). Folglich sind die Winkel AEC, CEB zwei rechten gleich, und die Winkel CEB, BED zwei rechten gleich. Demnach liegen die AE, EB, da sie mit der EC in Punkt E, und an verschiedenen Seiten von ihr liegend, die Nebenwinkel zweien rechten gleich machen, geradefort an einander (I, 14.): und ebenso liegen die CE, ED geradefort aneinander. — Andere indirecte Beweise der beiden Conversen sind angezeigt in Chrestom. geom. p. 247.

§. 157. Ausdruck der ersten Converse: „Wenn zwei an einem Punkt einer geraden Linie und an verschiedenen Seiten derselben liegende gerade Linien mit den zwei Abschnitten der ersten, je eine mit einem Abschnitt, gleiche Winkel machen: so liegen die zwei geraden Linien geradefort an einander."

Oder „wenn mit einer geraden Linie zwei an einem Punkt derselben und an verschiedenen Seiten von ihr liegende gerade Linien zwei Scheitelwinkel einander gleich machen: so liegen die zwei geraden Linien geradefort aneinander." So Proclus: *Εαν προς τινι ευθειᾳ δυο ευθειαι μη επι τα αυτα μερη ληφθεισαι, ποιωσι τας κατα κορυφην γωνιας ισας, επ' ευθειας εσονται αι ευθειαι.* (Chrestom. geom. p. 247.)

§. 158. Ausdruck der andern Converse: „Wenn zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien und zwei andere in demselben Punkte zusammentreffende an verschiedenen Seiten von einander liegen, nämlich die zwei ersteren von jeder der zwei letzteren, und die zwei letzteren von jeder der zwei ersteren; und die Winkel, welche die zwei ersteren mit den zwei letzteren, je eine mit einer, machen, einander zwei und

zwei gleich sind: so liegen sowohl die zwei ersteren geraden Linien, als die zwei letzteren, geradefort an einander."

Oder „wenn von den vier Nebenwinkeln um einen Punkt herum, welche vier in diesem Punkt zusammentreffende gerade Linien machen, je zwei einander gegenüberliegende einander gleich sind: so liegen je zweier von diesen Winkeln, welche Nebenwinkel von einander sind, nicht gemeinschaftliche Schenkel geradefort an einander."

Peletarius Ausdruck: „Si quatuor rectae lineae ab uno puncto executes binos angulos oppositos inter se aequales fecerint: erunt quaelibet duae rectae lineae adversae in rectum sibi et continuum conjunctae." (Chrestom. geom. p. 246.)

§. 159. Den Zusatz (*Πορισμα*) betreffend, welcher nach Satz XV. in mehreren Handschriften und Ausgaben sich findet, aber in einem bedeutenden Theile fehlt (s. Camerer p. 72.): „Hieraus erhellt: dafs, wie viele gerade Linien immer einander schneiden mögen, sie die Winkel am Durchschnitt vier rechten gleich machen werden": so ist zu bemerken:

1) dafs derselbe in dem allgemeinen Satz §. 143, b), welcher gilt, die geraden Linien mögen einander schneiden oder nicht, enthalten ist;

2) dafs der Satz für beide Fälle aus I, 13. ohne I, 15. zu folgern ist, wie dort gezeigt worden;

3) dafs er in den Elementen sonsten nirgends gebraucht wird: blofs der specielle Fall für drei gerade Linien, die in einem Punkte zusammentreffen, ohne sich zu schneiden, und drei Nebenwinkel um diesen Punkt machen, welche vier rechten gleich sind, wird in XI, 23. gebraucht.

§. 160. Das Wort *Πορισμα* (Zusatz, Corollarium) betreffend: so pafst die von Proclus, als die ursprüngliche, aufgestellte Bedeutung eines gleichsam „gewonnenen, gefundenen Satzes" (*ἑρμαιον*), und der specielle Begriff eines solchen Satzes, der beim Beweise eines Hauptsatzes sich nebenher (quasi aliud agendo, in transcursu) ergebe, und etwa nur etwas, das bei einem solchen Beweis in einem einzelnen Fall vorgekommen, in seiner Allgemeinheit ausspreche, zwar auf mehrere in den Elementen vorkommende *Πορισματα*; namentlich auf die nach II, 4. III, 31. IV, 15. Thl. 1. VI, 8. XI, 35. stehenden. Aber diese eingeschränktere Bedeutung pafst

doch nicht auf alle Fälle, wo die Aufschrift πορισμα vorkommt; indem unter derselben auch Zusätze anderer Art, dergleichen oben unter dem Titel Πορισματα (Seite 64. 65.) bezeichnet worden, vorkommen.

§. 161. Anwendungen des Satzes XV. und seiner Conversen ohne nachfolgende Sätze kommen vor in der Chrestom. geom.

S. 340. Satz VII. „Wenn in einem Dreieck —
S. 370. f. a) „Wenn an eine gerade Linie —
— c) „Wenn auf einer geraden Linie —
S. 371. f. B) 1. „Wenn in einem Viereck —
S. 376. b. „Wenn in einem Viereck —
— d. „Wenn in einem Viereck —
— f. „Wenn in einem Viereck —
S. 377. g. „Wenn in einem Viereck —
— h. „Wenn in einem Viereck —
S. 378. α. „Wenn in einem Viereck —
— β. „Wenn in einem Viereck —
S. 379. ε. „Wenn in einem Viereck —
S. 381. Satz 1. „Wenn einem Dreieck —
S. 385. f. Satz 3, b. „Wenn in einem Viereck —
S. 387. Satz 8. „Wenn in einem Viereck —
S. 393. Lehnsatz C. „Wenn in einem Viereck —
— Satz 22. a) u. b) „Wenn in einem Viereck —
S. 394. Satz 23. „Wenn in einem Viereck —

(Fig. zu I, 15. in d. Uebers.) Noch eine Anwendung gibt die Aufgabe: „Es sey eine gerade Linie AB, und auf ihr der Punkt E, und die aus diesem Punkte gezogene gerade EC gegeben: man soll aus dem nämlichen Punkt E und an der andern Seite der AB eine gerade Linie ziehen, welche mit dem Abschnitt EB einen Winkel mache demjenigen gleich, welchen die erste gezogene CE mit dem Abschnitt AE macht." Man verlängere CE nach D; so ist ED die verlangte.

Satz XVI.

§. 162. Wenn eine Seite eines Dreiecks verlängert wird: so macht ihre Verlängerung mit der anliegenden Seite einen Winkel, welcher auserhalb des Dreiecks liegt; und von welchem einer der innern Winkel des Dreiecks Nebenwinkel ist, die zwei übrigen aber ihm gegenüberliegen oder seine Gegenwinkel sind.

Mit seinem innern Nebenwinkel macht jener Aussenwinkel zwei rechte aus (I, 13.); und ist also ein rechter,

stumpfer oder spitziger, je nachdem der innere ein rechter, spitziger oder stumpfer ist. Nun ist aber die Frage: ob zwischen ihm und jedem der innern Gegenwinkel in Absicht auf Gleichheit oder Ungleichheit etwas Allgemeines und Beständiges Statt habe?

§. 163. Fürs erste nun wird sich zeigen: dafs, wenn ein solches Allgemeines und Beständiges in Betreff des Aufsenwinkels und des einen seiner innern Gegenwinkel Statt hat, es auch in Beziehung auf den andern Statt habe. Der eine von diesen innern Gegenwinkeln liegt an der verlängerten Seite, der andere liegt der verlängerten Seite gegenüber. Gesetzt nun, der Aufsenwinkel eines Dreiecks sey immer gröfser als der der verlängerten Seite gegenüberliegende innere Winkel: so wird auch jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks gröfser seyn als der an ihr liegende innere Gegenwinkel; und umgekehrt. (*Fig.* 78.) Denn es sey irgend ein Aufsenwinkel ACD, und die erwähnte Voraussetzung finde Statt: so wird auch der Winkel ACD gröfser seyn als der innere Winkel ABC. Man verlängere die AC nach G. So ist nach jener Voraussetzung der Aufsenwinkel BCG gröfser als der der verlängerten Seite AC gegenüberliegende innere ABC. Dem Winkel BCG ist aber der Winkel ACD gleich, als Scheitelwinkel (I, 15.). Folglich ist auch der Winkel ACD gröfser als der innere an der verlängerten Seite liegende Gegenwinkel ABC; w. z. e. w. Und auf ähnliche Art läfst sich das Umgekehrte erweisen.

§. 164. Analysis des Beweises des I. Theils von Satz XVI.

a) Um nun den Aufsenwinkel erstlich in Vergleichung mit dem der verlängerten Seite gegenüberliegenden innern zu untersuchen; kann man sich die Aufgabe vorlegen: (*Fig.* 79) Es sey ein Dreieck ABC; und an C soll aufserhalb des Dreiecks eine gerade Linie gezogen werden, welche mit der AC einen Winkel mache, der dem Winkel BAC gleich sey: und es fragt sich, ob diese gerade Linie mit CD, der Verlängerung von AB, zusammenfallen, oder unterhalb derselben oder oberhalb derselben fallen werde? Je nachdem eines von diesen Statt hat; so wird der Aufsenwinkel ACD dem innern BAC gleich, oder kleiner oder gröfser seyn.

b) Man setze erstlich, die zu ziehende gerade Linie falle, wenns möglich ist, mit der CD zusammen; d. i. der Winkel ACD sey dem Winkel BAC gleich: und

man nehme die CD der AC gleich, und ziehe die AD, um den Satz I, 4. anwenden zu können. Da nun die zwei DC, CA den zweien BA, AC gleich, und der Winkel DCA dem BAC gleich ist: so ist der Winkel DAC dem BCA gleich (I, 4.). Nun ist auch der Winkel BAC dem ACD gleich (Vorauss.). Folglich sind die zwei BAC, CAD den zweien DCA, ACB zusammen gleich; also (I, 13.) gleich zwei rechten. Folglich liegen (I, 14.) BA, AD in einer geraden Linie: und mithin schliefsen die zwei geraden Linien BCD, BAD einen Raum ein, nämlich das Dreieck BAD: welches nicht möglich ist (Ax. 12.). Folglich ist es unmöglich, dafs der Aufsenwinkel ACD dem innern der verlängerten Seite gegenüberliegenden Winkel BAC gleich sey.

c) (*Fig.* 80.) Man setze nun, die zu ziehende CE falle unterhalb der CD, oder auf die andere Seite von ihr, als an welcher die CAD liegt; d. i. der Aufsenwinkel ACD sey kleiner als der BAC. Und man nehme wiederum die CE=BA, und ziehe AE. So wird wiederum (vermöge I, 4.) der Winkel CAE dem BCA gleich seyn; mithin die zwei BAC, CAE den zweien ACE, ACB zusammen gleich, und also gröfser als die zwei ACD, ACB, d. i. (I, 13.) gröfser als zwei rechte seyn. Man verlängere aber die BA nach H: so sind die Winkel BAC, CAH=2 rechten (I, 13.), also die Winkel BAC, CAE kleiner als 2 rechte. Sie sind aber auch gröfser als 2 rechte, nach dem Bewiesenen; welches unmöglich ist. Folglich ist es unmöglich, dafs der Aufsenwinkel ACD kleiner als der der verlängerten Seite gegenüberliegende innere Winkel BAC sey.

d) (Fig zu I. 16. in der Uebers.) Man setze nun, die zu ziehende CF falle oberhalb der CD, d. i. an der nämlichen Seite von ihr, an welcher die CA liegt; und nehme wiederum die CF=AB. Da nun auch Winkel ACF=BAC (Vorauss.); so nehme man, um I, 4. anwenden zu können, auch die AE, EC gleich, d. i. die AC in E halbirt; und ziehe die FE, EB. So ist (I, 4.) EF=BE, und Winkel CEF=AEB; daher (I, 15. Conv. 1.) BE, EF geradefort an einander. Die Aufgabe ist mithin darauf reducirt: nachdem die AC in E halbirt ist, die BE zu verlängern, und die EF der BE gleich zu nehmen: so ist CF die zu ziehende gerade Linie, welche den Winkel ACF dem BAC gleich macht.

Der Beweis steht im Texte. Und dann folgt, dafs der Winkel ACD gröfser als der BAC sey; d. i. der

Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gröfser als der der verlängerten Seite gegenüber liegende innere Winkel.

§. 165. Hieraus folgt, oder läfst sich auf dieselbe Art unmittelbar beweisen, dafs, wenn man die BC nach G verlängert, auch Winkel BCG >ABC sey. Folglich ist auch der dem BCG gleiche (I, 15.) Winkel ACD >ABC: d. i. der Aufsenwinkel gröfser als der an der verlängerten Seite liegende innere Gegenwinkel.

Dieses kann auch so gefolgert werden. (*Fig.* 81.) Nachdem BC in H halbirt, AH gezogen, und ihr die HJ gleich gemacht, JC gezogen und nach K verlängert worden: so ist der Winkel KCD=HCJ (I, 15.) =ABH (I, 4.): Folglich Winkel ACD >ABC.

§. 166. (*Fig.* 82.) Gleichförmig könnte für beide Theile der Beweis so geführt werden. Man halbire AC in E, ziehe BE, verlängere sie, bis EF=BE, ziehe die FA, und verlängere sie nach G. Ebenso halbire man BC in H, ziehe AH, verlängere sie, bis HJ=AH, ziehe JB, und verlängere sie nach K. So wird (I, 15. 4.) der Winkel ACB jedem der Winkel CAF, CBJ gleich; folglich sein Nebenwinkel ACD jedem der Nebenwinkel von jenen, CAG, CBK (§. 141.) gleich seyn; und also gröfser als ihre Theile CAB, CBA.

§. 167. Andere Ausdrücke des Satzes XVI.:

Theil 2. „Wenn eine Seite eines Dreiecks über die Grundlinie hinaus verlängert wird; so ist der Winkel unter der Grundlinie gröfser als der Winkel an der Spitze."

Theil 1. „Wenn eine Seite eines Dreiecks über den einen Endpunkt der Grundlinie hinaus verlängert wird: so ist der Winkel unter der Grundlinie gröfser als der Winkel an der Grundlinie am andern Endpunkt."

Da in dem Satze von dem Raum, den das Dreieck einschliefst, nicht die Rede ist: so läfst sich der Satz auch ohne das Wort Dreieck ausdrücken; jedoch werden die Ausdrücke weitläufiger, z. B.

Theil 2. „Wenn aus einem auf dem einen Schenkel eines Winkels angenommenen Punkt eine gerade Linie an dessen andern Schenkel gezogen wird: so schliefst sie mit dem äufsern Theile des ersten Schenkels einen Winkel ein, der gröfser ist als der anfängliche Winkel."

Oder „Wenn innerhalb eines Winkels eine gerade Linie zwischen seinen Schenkeln gezogen wird: so ist jeder der Winkel, welche sie mit den Schenkeln

an der von der Spitze abgekehrten Seite macht, gröfser als der anfängliche Winkel."

Oder „Wenn von dem einen Schenkel eines Winkels an den Endpunkt der Verlängerung des andern über die Spitze hinaus eine gerade Linie gezogen wird: so schliefst dieselbe mit der Verlängerung einen Winkel ein, der kleiner als der anfängliche Winkel ist."

Theil 1. „Wenn zwei aus dem Endpunkte einer geraden Linie gezogene gerade Linien zusammentreffen, und die erste an dem einen Endpunkt verlängert wird: so ist der Winkel, den die eine mit dieser Verlängerung macht, gröfser als derjenige, den die zwei gezogenen mit einander machen."

Oder „Wenn eine gerade Linie durch zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien hindurchgeht: so ist von den Winkeln, die sie mit ihnen an der Seite, an welcher sie zusammentreffen, macht, jeder der äusseren gröfser als der gegenüberliegende innere."

Oder „Wenn an eine gerade Linie von einem Punkt aufser ihr zwei gerade Linien gezogen werden: so ist von den Winkeln, welche sie mit ihr machen, jeder äufsere gröfser als der gegenüberliegende innere."

Oder „Wenn ein Schenkel eines Winkels über seine Spitze hinaus verlängert, und von dem Endpunkt der Verlängerung an den andern Schenkel eine gerade Linie gezogen wird: so macht diese mit dem zweiten Schenkel einen Winkel, der kleiner als der anfängliche Winkel ist."

§. 168. 1. Anwendung des Satzes 16. auf den Beweis des Satzes 6. In diesem letztern würde (s. Fig. zu I, 6. in d. Uebers.) folgen: auch ist der Winkel BDC dem BAC gleich. Dieses ist aber wiederum vermöge dieses Satzes 16. unmöglich.

2. Anwendung der Aufgabe §. 164, a. zu Auflösung der Aufgabe: „An einen gegebenen Punkt (in einer vorgelegten Ebene) einen Winkel legen, der einem gegebenen Winkel gleich sey."

a) (*Fig.* 83.) Es sey ein geradlinigter Winkel BAC, und auf einem seiner Schenkel AB ein Punkt D gegeben: man soll an diesen Schenkel in dem gegebenen Punkt D einen Winkel anlegen, der dem gegebenen BAC gleich sey.

Man halbire die AD in E; nehme auf der AC einen beliebigen Punkt F, ziehe FE, und verlängere sie, bis

EG=EF; ziehe GD, und verlängere sie nach H. So wird der Winkel BDH=GDE=EAF seyn.

b) (*Fig.* 84.) Es sey ein geradlinigter Winkel BAC, und auf der Verlängerung eines seiner Schenkel BA der Punkt D gegeben: man soll an diesen Schenkel in D einen dem BAC gleichen Winkel anlegen.

Man verlängere CA beliebig nach F, halbire AD in E, ziehe FE, und mache ihr die EG gleich, ziehe DG, und verlängere sie nach H. So ist der Winkel ADH =DAF=BAC.

c) (*Fig.* 85, a. b.) Es sey ein geradlinigter Winkel BAC gegeben: man soll an einen auserhalb seiner Schenkel gegebenen Punkt D einen dem gegebenen gleichen Winkel legen.

Man ziehe die AD, verlängere sie nach G; und lege an GD (nach a) und b)) einen Winkel GDE=GAB, und GDF=GAC. So wird (Ax. 2. 3.) der Winkel EDF=BAC seyn.

Verbindet man hiemit die Aufgabe §. 73, 3): so erhält man eine Auflösung der Aufgabe: „An eine gegegebene gerade Linie in einem auf ihr gegebenen Punkt einen geradlinigten Winkel anlegen, der einem gegebenen gleich sey": ohne den Satz I, 22. zu gebrauchen: welche freilich der Auflösung in I, 23. an Einfachheit weit nachsteht.

§. 169. Die für den Beweis S. XVI. gebrauchte Construction läßt sich auch für den Beweis einiger anderer Lehrsätze gebrauchen: z. B.

1) (*Fig.* 86.) „Wenn in einem Dreieck ABC die nämliche gerade Linie AD sowohl den Winkel BAC an der Spitze, als die Grundlinie BC halbirt: so ist das Dreieck gleichschenklicht."

Man verlängere die AD, bis DE=AD; und ziehe BE. So ist (I, 4.) BE=AC, und Winkel BED=CAD d. i. (Vorauss.) =BAD. Folglich ist BE=BA (I, 6.). Nun war auch gezeigt BE=AC. Folglich AB=AC. (Ax. 1.) (S. Chrestom. geom. S. 340.)

2) (*Fig.* 87.) „Wenn zwei Dreiecke (ABC, abc) zwei Seiten zweien Seiten, je eine einer (die AB der ab, und die AC der ac), und die von den Spitzen an die Halbirungspunkte der Grundlinien gezogenen geraden Linien (AD, ad) einander gleich haben: so haben sie auch die Grundlinien (BC, bc) gleich."

Man verlängere die AD nach E, und mache ihr die DE gleich; ziehe BE. Ebenso verlängere man die ad,

mache ihr die de gleich, und ziehe be. Und da die AD der ad gleich ist, so ist auch die AE der ae gleich. (Ax. 6.) Ferner da die BD, DE den CD, DA gleich sind, und Winkel BDE=CDA (I, 15.); so ist auch (I, 4.) die BE=AC. Ebenso wird bewiesen, dafs die be=ac. Es sind aber die AC, ac gleich (Vorauss.): folglich sind auch die BE, be gleich. Da demnach die BA, AE der ba, ae, und die BE der be gleich ist: so ist auch (I, 8.) der Winkel BAE dem bae gleich. Nun sind die BA, AD den ba, ad gleich, und Winkel BAD=bad: folglich auch (I, 4.) BD=bd, und daher auch (Ax. 6.) BC=bc.

§. 170. Zieht man (in der Figur zu I, 16. in der Uebers.) die AF: so erhält man das Viereck BCFA, in welchem die Diagonalen AC, BF einander halbiren: und wie die Dreiecke AEB, CEF verglichen worden, so die Dreiecke BEC, AEF sich vergleichen lassen: und man wird den Satz beweisen können:

„Wenn in einem Viereck die beiden Diagonalen einander halbiren: so sind dessen jede zwei Gegenseiten einander gleich, und jede zwei Gegenwinkel gleich; jede der beiden Diagonalen halbirt das Viereck, und ist gegen jedes paar Gegenseiten unter gleichen Winkeln geneigt; und von den vier Dreiecken, in welche sie das Viereck theilen, sind jede zwei am Scheitel einander gegenüberliegende einander gleich;"

von welchem in der Chrestom. geom. S. 370—381. mehrere Conversen vorgetragen werden.

Ebendaselbst wird S. 381—384. in Beziehung auf diesen Satz XVI. gezeigt: wie jedem gegebenen Dreieck unzählig viele andere an Fläche gleiche und mit gleicher Grundlinie sich beschreiben lassen, deren überdiefs je zwei noch eine Seite gleich haben, die in dem einen die gröfsere, in dem andern die kleinere der beiden Seiten ist.

§. 171. Hiezu noch folgende zwei Sätze, die man als von einer aus Lehrsatz und Aufgabe gemischten Art betrachten kann:

1) (*Fig.* 88.) Es sey eine gerade Linie AB, und eine aus ihrem einen Endpunkt A und an der einen Seite derselben gezogene nach C hin unbegränzte gerade AC gegeben: so läfst sich auf der AB ein Punkt D finden, und aus ihrem andern Endpunkt D und an der andern Seite von ihr eine nach E hin unbegränzte BE ziehen, dergestalt, dafs, wenn man von der AC und BE irgend zwei gleiche Stücke AF, BG (oder Af, Ag) abschneidet,

die von deren Endpunkten an den Punkt D gezogenen geraden geraden Linien FD, DG (oder fD, Dg) geradefort aneinander liegen.

Man halbire nämlich die AB in D, nehme auf der AC einen beliebigen Punkt F, ziehe FD, und nehme ihre Verlängerung DG=DF, ziehe BG, und verlängere sie nach E. So ist (I, 45. 4.) Winkel CAB=ABC. Daher wenn man Af, Bg gleich abschneidet, und fD, Dg zieht; so ist (I, 4.) Winkel fDA=gDB; mithin (I, 15. Conv. 1. §. 157.) fD, Dg in Einer geraden Linie an einander.

2. (*Fig.* 89.) Es sey eine in A begränzte gerade Linie AC, und aufser ihr ein Punkt B gegeben: so läfst sich ein anderer Punkt D und eine in demselben begränzte gerade Linie DE finden, so dafs, wenn von den beiden geraden Linien AC, DE irgend zwei gleiche Stücke AF, DG (oder Af, Dg) abgeschnitten, und von deren Endpunkten an den Punkt B gerade Linien FB, BG (oder fB, Bg) gezogen werden, diese geradefort an einander liegen.

Man verlängere die AB nach D, und mache die BD =BA; nehme auf der AC einen beliebigen Punkt F, ziehe FB, und nehme ihre Verlängerung BG=BF: ziehe DG, und verlängere sie nach E: so werden der Punkt D und die gerade Linie DE die verlangten seyn. Schneidet man nämlich von AC, DE irgend zwei gleiche Af, Dg ab, und zieht fB, Bg: so werden diese geradefort an einander liegen. Der Beweis is derselbe wie in 1.

Diese zwei Sätze sind von der Klasse derjenigen, welche bei den alten Geometern Porismen (in einem andern Sinn als §. 160.) hiefsen. S. Scholae logico-mathematicae, Cap. X.

Satz XVII.

§. 172. Beweis des Satzes. Nimmt man irgend zwei Winkel eines Dreiecks: so ist je der eine von ihnen kleiner als der Nebenwinkel des andern (welcher durch Verlängerung einer der zwei ihm anliegenden Seiten entsteht) (I, 16.): denn dieser Nebenwinkel ist Aufsenwinkel des Dreiecks, und jener erstere ist innerer Gegenwinkel desselben. Folglich sind die zwei anfangs genannten Winkel zusammen kleiner als die zwei Nebenwinkel, der innere und der äufsere, d. i. (I, 13.) kleiner als zwei rechte. Demnach sind jede zwei Winkel eines Dreiecks kleiner als zwei rechte.

Da man bei diesem Beweis den Nebenwinkel des einen oder des andern nehmen kann, und jeder dieser Nebenwinkel durch Verlängerung der einen oder der andern der anliegenden Seiten genommen werden kann; so kann die zur Vorbereitung des Beweises für zwei angenommene Winkel dienende Construction auf viererlei Art, durch viererlei Verlängerungen, gemacht werden.

§. 173. Anderer Ausdruck des Satzes: „Wenn zwei gerade Linien zusammentreffen, und von einer dritten geschnitten werden: so macht diese mit ihnen an der Seite, an welcher sie zusammentreffen, zwei innere Winkel, die zusammen kleiner als zwei rechte sind."

Oder „Wenn innerhalb eines Winkels eine gerade Linie an dessen beide Schenkel gezogen wird: so macht sie mit diesen an der des Winkels Spitze zugekehrten Seite zwei Winkel, die zusammen kleiner als zwei rechte sind."

Oder „Wenn zwei auf einer geraden Linie in ihren Endpunkten und an einerlei Seite derselben aufgestellte gerade Linien an dieser Seite zusammentreffen: so sind die Winkel, welche sie mit der ersten machen, kleiner als zwei rechte.

§. 174. a) Gesetzt ein Winkel A eines Dreiecks ABC sey nicht spitzig: so werden die zwei übrigen B und C spitzig seyn. Denn da die zwei A und B zusammen kleiner als zwei rechte sind (I, 17.); der A aber nicht kleiner als ein rechter ist (Vorauss.): so mufs der B kleiner als ein rechter seyn. (Denn wäre er nicht kleiner als ein rechter; da auch der A nicht kleiner als ein rechter ist; so wären die zwei A und B zusammen nicht kleiner als zwei rechte; gegen I, 17.) Und ebenso wird bewiesen, dafs der C kleiner als ein rechter, d. i. spitzig sey.

Dieser Schlufs hat die Form des allgemeinen Axioms: wenn zwei Gröfsen zusammen kleiner als das Doppelte einer dritten sind: so ist wenigstens die eine der ersten kleiner als die dritte; nämlich wenn es die eine nicht ist, so ist es die andere. Denn wäre keine von beiden kleiner als die dritte: so könnten nicht beide zusammen kleiner als das Doppelte der dritten seyn.

b) Demnach sind „in jedem Dreiecke zwei seiner Winkel spitzig;" und „höchstens einer seiner Winkel ein rechter oder stumpfer. Und ein rechter oder stum-

pfer Winkel in einem Dreieck ist gröfser als jeder der beiden übrigen."

Hienach hat ein Dreieck, wenn es nicht drei spitze Winkel hat, entweder einen rechten und zwei spitze, oder einen stumpfen und zwei spitze. Jenes heifst ein rechtwinklichtes, dieses ein stumpfwinklichtes; spitzwinklicht ein solches, das drei spitze Winkel hat. Dieses sind Def. 27. 28. 29. dieses Buchs.

Dafs es Dreiecke der letztern Art gebe, davon folgt gleich ein Beispiel.

§. 175. a) „Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist spitzig; jeder Aufsenwinkel desselben stumpf."

Der Beweis mittelst I, 17. beruht auf dem Axiom: „Wenn zwei einander gleiche Gröfsen zusammen kleiner als das Doppelte einer dritten sind: so ist jede von ihnen kleiner als die dritte." Denn wäre dieses nicht: so wäre die eine von ihnen der dritten gleich oder gröfser; mithin wäre es auch die andere, da sie der ersten gleich ist (Ax. C.): Folglich wären (Ax. 2. 4.) beide zusammen gleich dem Doppelten der dritten oder gröfser; gegen die Vorauss.

Da nun in jedem Dreieck jede zwei Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind; in einem gleichseitigen aber jede zwei Winkel einander gleich sind (§. 59.): so ist jeder Winkel derselben kleiner als ein rechter, oder spitzig. Hingegen ist jeder Aufsenwinkel desselben, da er des spitzigen innern Nebenwinkel ist, ein stumpfer (§. 140.).

b) „Jeder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks ist spitzig; jeder Aufsenwinkel desselben an der Grundlinie stumpf." — Wird ebenso bewiesen, wie das vorherg.

c) „Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander ungleich sind; so ist der kleinere von ihnen spitzig." — Denn wäre er nicht kleiner als ein rechter; so wäre der gröfsere gröfser als ein rechter; mithin beide zusammen gröfser als zwei rechte; gegen I, 17.

§. 176. a) (*Fig.* 90.) „Aus einem Punkt aufserhalb einer geraden Linie kann auf diese nicht mehr als Ein Perpendikel fallen." Zu I, 12. — Denn fielen von einem Punkt C auf eine gerade Linie AB zwei Perpendikel CD, CE: so wäre jeder der Winkel CDE, CED ein rechter; also diese zwei Winkel des Dreiecks CDE zwei rechte. Aber auch kleiner als zwei rechte (I, 17.); welches nicht möglich ist (Ax. 10. oder §. 130.).

b) (*Fig.* 91.) „Ist von einem Punkt C aufserhalb einer geraden Linie AB eine andere CD schief an diese gezogen: so fällt das von dem nämlichen Punkt C auf die erste AB gefällte Perpendikel auf diejenige Seite der schiefen CD, wo diese mit der ersten den spitzigen Winkel CDB macht."

Denn es kann nicht mit der CD zusammenfallen; sonst wäre die CD senkrecht auf der AB; sie ist aber schief: auch kann es nicht auf die Seite fallen, an welcher die CD den stumpfen Winkel CDA macht, wie die CB; sonst wäre der Winkel CED ein rechter; und da CDE ein stumpfer ist, so wären diese zwei Winkel des Dreiecks CDE gröfser als zwei rechte; welches unmöglich ist (I, 17.). Es mufs also an die andere Seite der CD fallen, d. i. an diejenige, wo die CD den spitzigen Winkel CDB macht.

§. 177. 1) a. (*Fig.* 92, a.) „Wenn das Perpendikel von der Spitze A auf die Grundlinie BC eines Dreiecks ABC innerhalb des Dreiecks fällt: so ist jeder der Winkel an der Grundlinie, ABC, ACB, spitzig." — Denn es sey das Perpendikel AD: so ist in dem Dreieck ABD der Winkel ADB ein rechter; also ABD spitzig (§. 174.). Und ebenso der Winkel ACD.

b. (*Fig.* 92, b.) Und „wenn es mit einer der Seiten des Dreiecks zusammenfällt: so macht diese Seite einen rechten, die übrige Seite einen spitzigen Winkel mit der Grundlinie." — Denn es falle mit der Seite AC zusammen: so ist also der Winkel ACB ein rechter (Def. 10.); mithin der ABC spitzig (§. 174.).

c. (*Fig.* 92, c.) Und „wenn es aufserhalb des Dreiecks, mithin auf die verlängerte Grundlinie fällt, wie AD: so macht die ihm nähere Seite AC einen stumpfen, die entferntere AB einen spitzigen Winkel mit der Grundlinie;" oder „so ist der ihm nähere Winkel ACB an der Grundlinie ein stumpfer, der entferntere ABC ein spitzer." — Denn der Winkel ACB als Aufsenwinkel des Dreiecks ACD ist gröfser als der rechte ADC (I, 16.); der ABC kleiner als ein rechter (§. 174.).

2) (*Fig.* a.) Umgekehrt: aa. „Wenn eines Dreiecks ABC Winkel ABC, ACB an der Grundlinie BC beide spitzig sind; so fällt das von der Spitze A auf seine Grundlinie BC gefällte Perpendikel innerhalb des Dreiecks. — Denn fiele es mit einer Seite zusammen: so würde diese Seite einen rechten Winkel mit der Grundlinie machen (1, b.);

fiele es aufserhalb des Dreiecks: so würde der ihm nähere Winkel an der Grundlinie ein stumpfer seyn (1, c.): welches beides der Vorauss., dafs beide Winkel an der Grundlinie spitzig seyen, widerspicht. Daher fällt in jedem gleichseitigen und gleichschenklichten Dreieck das Perpendikel von der Spitze auf die Grundlinie innerhalb des Dreiecks (§. 175.). — Und „in jedem recht- oder stumpfwinklichten Dreieck fällt das von der Spitze des rechten oder stumpfen Winkels auf die Grundlinie gefällte Perpendikel innerhalb des Dreiecks" (§. 174.). — Daher ferner: „wenn vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine den Kreis schneidende gerade Linie ein Perpendikel gefällt wird, so trifft es dieselbe innerhalb des Kreises."

bb) (*Fig.* b) Ist aber einer der Winkel an der Grundlinie ACB ein rechter: so trifft das Perpendikel auf dieses Winkels Spitze C; oder es fällt mit dem diesen Winkel machenden Schenkel AC des Dreiecks zusammen. — Denn fiele es innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks wie AD: so fielen aus einem Punkt A auf eine gerade Linie BC oder BD zwei Perpendikel AC, AD: welches nicht möglich ist (§. 176, a.).

cc) (*Fig.* c.) Und „wenn der eine Winkel ACB des Dreiecks an der Grundlinie stumpf ist; so fällt das Perpendikel aufserhalb des Dreiecks auf die über des stumpfen Winkels Spitze C verlängerte Grundlinie." — Denn man verlängere die BC nach E: da nun die AC auf der BE schief steht, indem sie mit ihr den stumpfen Winkel ACB, also den spitzigen ACE macht: so fällt (§. 176, b) das Perpendikel von A auf die BE an die Seite des spitzigen Winkels ACE, d. i. es trifft auf der Grundlinie Verlängerung CE.

§. 178. 1) (*Fig.* 38.) „Wenn in einem gleichschenkl. Dreiecke ABC eine von der Spitze gezogene gerade Linie AE den Winkel BAC an der Spitze, oder die Grundlinie BC, in ungleiche Theile theilt: so macht sie mit der Grundlinie schiefe Winkel, und zwar einen spitzigen AEB an der Seite des gröfseren Theils." — Denn man ziehe die AD, welche den Winkel BAC oder die BC halbire (I, 9. 10.), und zwischen B und E treffen wird (§. 111. 116.): so steht dieselbe auf der BC senkrecht (I, 4. 8.): folglich ist in dem Dreieck ADE, da der Winkel ADE ein rechter ist, der AED kleiner als ein rechter (I, 17.).

2) Umgekehrt: „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck ABC eine von der Spitze gezogene gerade Linie AE mit der Grundlinie BC schiefe Winkel AEB, AEC macht: so theilt sie den Winkel BAC an der Spitze und die Grundlinie BC in ungleiche Theile; und der an der Seite des spitzigen Winkels AEB liegende Theil (Winkel BAE, und Abschnitt BE) ist der gröfsere." — Denn wäre dieses nicht: so wären entweder die Theile gleich, oder der Abschnitt CE, der Winkel CAE wäre der gröfsere. Ersteres kann aber nicht seyn, weil sonst (I, 4. 8.) die AE auf der BC senkrecht stünde: letzteres auch nicht, weil (nach 1) der Winkel CEB spitzig wäre; beides gegen die Vorauss. (I, 13.), wornach der Winkel AEB spitzig ist.

§. 179. (*Fig.* 93, a.) Aufgaben: 1) Ein rechtwinklichtes Dreieck beschreiben, welches einen gegebenen spitzen Winkel ABC zu einem seiner Winkel, und die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite einer gegebenen geraden Linie D gleich habe. Aufl. mittelst I, 3. 12. u. §. 176, b.

2) Ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, welches einen gegebenen spitzen Winkel ABC zu einem seiner Winkel an der Grundlinie, und einen seiner Schenkel der gegebenen geraden D gleich habe. Aufl. mittelst I, 3. 12. §. 176, b. Beweis mittelst §. 126, a.

3) (*Fig.* 93, a. b.) Ein Dreieck beschreiben, welches einen gegebenen schiefen Winkel ABC zu einem seiner Winkel an der Grundlinie, die daran liegende Seite einer gegebenen D gleich, und das zwischen dem von der Spitze auf die Grundlinie fallenden Perpendikel und dem übrigen Winkel an der Grundlinie fallende Stück derselben oder ihrer Verlängerung einer gegebenen E gleich habe.

Fall I. Der gegebene Winkel ABC sey spitzig; und
a) das Perpendikel soll innerhalb des Dreiecks fallen;
b) das Perpendikel soll aufserhalb des Dreiecks fallen. Bestimmung der gegebenen E für diesen Fall.

Fall II. (*Fig.* 93, b.) Der gegebene Winkel ABC sey stumpf. Bestimmung der gegebenen E für diesen Fall.

Aufl. mittelst I, 3. 12. 3.

4) (*Fig.* 94.) An eine gegebene gerade Linie AB in einem auf ihr gegebenen Punkt A einen Winkel anlegen, der einem gegebenen schiefen geradlinigten Winkel C gleich sey.

Fall I. Der gegebene Winkel C sey spitzig.

(*Fig.* 94, a.) Man nehme auf einem seiner Schenkel einen beliebigen Punkt D, und fälle von ihm (I, 12.) auf den andern Schenkel das Perpendikel DE, welches innerhalb des Winkels fallen wird (§. 176, b.). Man schneide von der AB die AF=CE ab (I, 3.), errichte auf ihr in F die FG=ED senkrecht (I, 11. 3.), und ziehe AG: so wird (Ax. 10, I, 4.) der Winkel BAG dem Winkel C gleich seyn.

Fall II. Der gegebene Winkel C sey stumpf.

(*Fig.* 94, b.) Man nehme auf einem seiner Schenkel einen beliebigen Punkt D, und fälle von ihm auf den verlängerten andern Schenkel das Perpendikel DE (I, 12.), welches auf dessen Verlängerung treffen wird (§. 176, b.). Man verlängere die BA, und schneide von ihrer Verlängerung die AF=CE ab, errichte in F die senkrechte FG=ED, und ziehe AG. So wird (Ax. 10, I, 4.) der Winkel FAG dem ECD, daher auch (I, 13. oder §. 141,) der BAG dem gegebenen stumpfen C gleich seyn.

Satz XVIII.

§. 180. Dieser Satz ist Gegensatz des fünften, nach welchem, wenn zwei Seiten eines Dreiecks gleich sind, auch ihre Gegenwinkel gleich sind. Dieser 18te hingegen sagt: wenn zwei Seiten eines Dreiecks ungleich sind: so sind auch ihre Gegenwinkel ungleich; und zwar ist der Gegenwinkel der gröfsern Seite der gröfsere.

§. 181. Dafs, wenn in einem Dreieck zwei Seiten ungleich sind, ihre Gegenwinkel nicht gleich seyn können, folgt aus I, 6., oder ist in dessen Beweise enthalten, nach welchem, wenn die AB (Fig. zu I, 6.) gröfser ist als die AC, und von der AB die BD=AC abgeschnitten wird, wenn der Winkel ABC=ACB wäre, etwas Ungereimtes folgen würde. Da also die Gegenwinkel ungleicher Seiten ungleich sind: so fragt sich: welcher der gröfsere sey? Diese nähere Bestimmung gibt Satz XVIII. an.

§. 182. Der Euklidische Beweis läfst sich blofs in Worten so darstellen: a) Wenn man aus irgend einem gleichschenklichten Dreiecke ein ungleichschenklichtes bildet, indem man den einen Schenkel läfst, den andern aber über die Grundlinie hinaus verlängert, und vom Endpunkt des ersten an den Endpunkt der Verlängerung des andern eine gerade Linie zieht: so erhält man

am ersten Punkt einen Winkel des neuen Dreiecks, der gröfser ist als der dortige Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten, der ein Theil von ihm ist; an dem andern Punkt aber einen Winkel, der kleiner ist als der andere Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten (I, 16.), indem letzterer Aufsenwinkel, ersterer innerer Gegenwinkel des zu dem gleichschenklichten hinzukommenden Dreiecks ist. Da demnach der erstere Winkel des gebildeten ungleichschenklichten Dreiecks, welcher dem verlängerten Schenkel des gleichschenklichten gegenüberliegt, gröfser als der eine Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten; der andere Winkel des ungleichschenklichten aber, welcher dem nicht verlängerten Schenkel des gleichschenklichten gegenüberliegt, kleiner als der andere Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten ist; die Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten aber einander gleich sind (I, 5.): so ist der der gröfsern Seite des ungleichschenklichten gegenüberliegende Winkel gröfser als der der kleinern Seite gegenüberliegende. b) Es läfst sich aber jedes ungleichschenklichte Dreieck als aus einem gleichschenklichten, das den nämlichen Winkel an der Spitze, und die kleinere Seite zu einem seiner gleichen Schenkel habe, auf die besagte Art, nämlich durch Verlängerung des andern Schenkels entstanden betrachten. Folglich ist allgemein in jedem ungleichschenklichten Dreieck der der gröfsern Seite gegegenüberliegende Winkel gröfser als der der kleinern gegenüberliegende.

Der Schluſs in a) stellt in seiner Form das Axiom dar: wenn von zwei Gröfsen A, B die eine A gröfser ist als die eine C von zwei gleichen Gröfsen C, D; die andere B aber kleiner als die andere D: so ist die erste Gröfse A gröfser als die zweite B. Hier ist A der der gröfsern Seite gegenüberliegende Winkel, B der der kleinern Seite gegenüberliegende; C der eine Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten, welcher ein Theil des Winkels A ist; D der andere Winkel desselben, welcher Aufsenwinkel eines Dreiecks ist, in welchem B innerer Gegenwinkel ist.

Das in a) Vorgetragene läfst sich in folgenden Satz zusammenfassen: „Wenn an einem gleichschenklichten Dreiecke der Endpunkt eines der gleichen Schenkel an der Grundlinie und ein auf der Verlängerung des andern Schenkels unter der Grundlinie angenommener

Punkt durch eine gerade Linie verbunden werden: so ist von den Winkeln, welche dieselbe mit dem nicht verlängerten und mit dem verlängerten Schenkel einschliefst, der erste gröfser, der andere kleiner als einer der gleichen Winkel an der Grundlinie des gleichschenkl. Dreiecks; und daher der erste gröfser als der andere."

§. 183. (*Fig.* 95.) Anderer Beweis. Statt nach der Euklidischen Construction von der gröfsern Seite ein der kleinern gleiches Stück abzuschneiden: kann man die kleinere AB verlängern, und die AE der gröfsern AC gleich machen, und EC ziehen. So ist Winkel AEC=ACE (I, 5.) also >ACB. Aber Winkel ABC>AEC (I, 16.). Also noch viel mehr Winkel ABC>ACB. — So auch Proclus (Chrestom. geom. p. 254. s.).

Diesem Beweis entspricht der dem im vorherg. §. analoge Satz: „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck von dem gemeinschaftlichen Endpunkt eines Schenkels und der Grundlinie an den andern Schenkel eine gerade Linie gezogen wird: so schliefst dieselbe mit dem ersten Schenkel einen kleinern, mit dem andern aber an der Seite gegen die Spitze hin einen gröfsern Winkel ein, als einer der gleichen Schenkel mit der Grundlinie einschliefst; und daher ist auch der zweite der genannten Winkel gröfser als der erste.

§. 184. (*Fig.* 96, a.) Anderer Beweis. a) Man halbire (I, 9.) den Winkel BAC durch die AD, schneide von der gröfsern AC die AE=AB ab, und ziehe DE. So ist (I, 4.) Winkel ABD=AED. Aber Winkel AED>ACD als Aufsenwinkel und innerer Gegenwinkel (I, 16.), folglich Winkel ABC>ACB.

b) Oder man halbire wie vorhin den Winkel BAC, und verlängere die kleinere AB, so dafs AF=AC werde; ziehe FD. So ist (I, 4.) Winkel AFD=ACD. Aber (I, 16.) Winkel ABC>AFD; folglich auch >ACB.

§. 185. Der vollständigere Ausdruck des Satzes wäre: „*Παντὸς τριγωνε*" *ανισες εχοντος δυο πλευρας*, „*ἡ μειζων πλευρα την μειζονα γωνιαν ὑποτεινει.*" Euklid, der sich in den Aussagen seiner Sätze der möglichsten Kürze befleifst, läst diese Bestimmung des *τριγωνε* hinweg, weil sie sich aus dem Subjecte *ἡ μειζων πλευρα*, welches einer Bedingung gleichgültig ist, subintelligiren läfst (Chrestom. geom. p. 196, s. nr. 4.) „*Παντος τριγωνε*," *λεγων ὁ Στοιχειωτης*, sagt Proclus, *εχι και το ισοπλευρον λεγει, αλλα τε εχοντος μειζω και ελαττω πλευραν.* S. ebend. p. 284.

§. 186. Anderer Ausdruck: „In einem ungleichschenklichten Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander ungleich; und an dem gröfseren Schenkel liegt der kleinere, an dem kleinern der gröfsere Winkel;" oder: „und derjenige ist gröfser, welchen der kleinere Schenkel mit der Grundlinie macht." Dieses ist nämlich eben derselbe, der dem gröfsern Schenkel gegenüberliegt.

Auch ohne das Wort Dreieck: „Wenn an die Endpunkte einer geraden Linie zwei ungleiche gerade Linien gezogen sind: so macht die gröfsere von ihnen einen kleinern Winkel mit der ersten, als die kleinere.

§. 187. Der Satz I, 6. könnte nun aus diesem, unabhängig von ihm bewiesenen, Satz 18. gefolgert werden. Wären nämlich in einem Dreieck, worin zwei Winkel einander gleich sind, die ihnen gegenüberliegenden Seiten nicht gleich: so wäre eine gröfser als die andere: alsdann läge aber auch jener (vermöge dieses S. 18.) ein gröfserer Winkel gegenüber als dieser; welches nicht ist. Also können diese Seiten nicht ungleich seyn: sie sind also gleich.

§. 188. Andere Folgerungen und Zusätze zu I, 18.:

a) Wenn in einem Dreieck zwei Seiten ungleich sind: so ist der Gegenwinkel der kleinern von ihnen spitzig. — Denn wäre er nicht kleiner als ein rechter: so wäre der Gegenwinkel der gröfsern Seite, da er gröfser ist als jener (I, 18.), gröfser als ein rechter: also beide zusammen gröfser als zwei rechte; welches unmöglich ist (I, 17.).

b) Wenn eine Seite BC eines Dreieckes nicht kleiner ist als jede der beiden andern: so sind die beiden an ihr liegenden Winkel ABC, ACB spitzig. — Denn wäre der Winkel ACB nicht spitzig oder kleiner als ein rechter: so wäre der Winkel BAC, der ihm entweder gleich seyn wird, wenn nämlich die BC der BA gleich ist (I, 5.); oder gröfser (I, 18.), wenn die BC gröfser als die BA ist; auch nicht kleiner als ein rechter; folglich die beiden Winkel bei A und C zusammen nicht kleiner als zwei rechte: das sind sie aber nach I, 17. Folglich kann der Winkel ACB nicht anders als spitzig seyn. Und ebenso wird bewiesen, dafs auch der Winkel ABC spitzig sey.

Demnach fällt das auf eine solche Seite eines Dreiecks, die nicht kleiner als jede der beiden andern ist, aus ihrem Gegenwinkel gefällte Perpendikel innerhalb

des Dreiecks (§. 177, 2. aa). Namentlich also im ungleichseitigen Dreieck fällt das auf die gröfste Seite aus ihrem Gegenwinkel gefällte Perpendikel immer innerhalb; ebenso in einem gleichschenklichten, dessen jeder Schenkel gröfser als die Grundlinie ist, das aus einem der Endpunkte der Grundlinie auf den gegenüberliegenden Schenkel gefällte Perpendikel.

§. 189. a) Eines gleichschenklichten Dreiecks Winkel an der Spitze ist gröfser als jeder Winkel an der Grundlinie, wenn die Grundlinie gröfser ist als jeder Schenkel; kleiner aber, wenn sie kleiner ist. — Folgt unmittelbar aus I, 18.

b) Ein ungleichseitiges Dreieck ist auch ungleichwinklicht: und zwar ist in demselben der Gegenwinkel der gröfsten Seite der gröfste; der Gegenwinkel der mittlern Seite der mittlere; der Gegenwinkel der kleinsten Seite der kleinste; und die zwei letztern sind beide spitzig (§. 188, a.).

§. 190. (*Fig.* 87.) „Wenn in einem Dreieck ABC, dessen zwei Seiten AB, AC ungleich sind, eine gerade Linie AD von der Spitze A an den Halbirungspunkt D der Grundlinie BC gezogen wird: so theilt dieselbe den Winkel BAC an der Spitze in zwei ungleiche Theile, und derjenige Theil CAD ist der gröfsere, welcher an der kleinern Seite AC liegt." — Denn man verlängere die AD, und mache ihr die DE gleich, ziehe die BE. So ist (I, 15. 4.) die BE=AC, und Winkel BED=DAC. Da nun BA >AC (Vorauss.) d. i. BE: so ist (I, 18.) Winkel BEA >BAE: folglich auch Winkel CAD >BAD. — Ist umgekehrter Gegensatz von dem Satz in §. 169, 1.

§. 191. a. (*Fig.* 97.) Converse des §. 190., directer Gegensatz des §. 169, 1. „Wenn in einem Dreieck ABC die den Winkel BAC an der Spitze halbirende gerade Linie AD die Grundlinie AC in ungleiche Theile theilt: so sind des Dreiecks Seiten AB, AC ungleich, und diejenige AC die gröfsere, die an dem gröfsern Abschnitt DC der Grundlinie liegt." — Denn man verlängere die AD, und mache ihr die DE gleich; schneide von dem gröfsern Abschnitt DC die dem kleinern DB gleiche DF ab; ziehe EF, und verlängere sie, bis sie der AC begegne: es geschehe in G. So ist (I, 15. 4.) die EF=AE, und Winkel DEF=DAB also auch =DAC. Da demnach die Winkel GAE, AEG einander gleich sind: so ist auch (I, 6.) AG=GE und mithin >EF, also noch

vielmehr AC>EF d. i. >AB. (Chrest. geom. p. 256. s. findet sich dieser Satz von Proclus vorgetragen.)

b. (*Fig.* 98.) Wenn in einem Dreieck ABC eine gerade Linie AD die Grundlinie BC in gleiche, den Winkel BAC an der Spitze aber in ungleiche Theile theilt: so sind des Dreiecks Seiten AB, AC ungleich, und diejenige AB die gröfsere, welche an dem kleinern Theil BAD des Winkels an der Spitze liegt. — Denn man halbire den Winkel BAC durch die AE: so wird diese zwischen AD, AC fallen (§. 111.): und da BD=DC (Vorauss.); so ist BE>EC. Da demnach die den Winkel an der Spitze halbirende AE die Grundlinie BC in ungleiche Theile theilt; so ist (nach a.) die an dem gröfsern Abschnitt BE der Grundlinie liegende Seite AB gröfser als die andere AC: w. z. e. w.

Diesen letztern Satz (b), welcher mit dem vorherg. (a) einerlei Hauptfolge, und nur einigermafsen umgekehrte Bedingungen hat, stellt Proclus (a. a. O.) nicht allgemein dar; er gebraucht ihn aber, und beweist ihn in einem besondern Fall (ebend. p. 257. s. nr. 4.).

Satz XIX.

§. 192. Dieser Satz ist Converse des 18ten und Gegengesatz des 6ten. Der Sinn desselben: Wenn zwei Winkel eines Dreiecks ungleich sind: so sind auch ihre Gegenseiten ungleich; die Gegenseite des gröfsern Winkels gröfser.

§. 193. Beweis. Da nach I, 18. in einem Dreieck, worin zwei Seiten ungleich sind, der gröfsere dem gröfsern Winkel gegenüberliegt: so können, wenn zwei Winkel ungleich sind, die ihnen gegenüberliegenden Seiten nicht dermafsen ungleich seyn, dafs die gröfsere dem kleinern Winkel gegenüberliege. Sie können aber auch nicht gleich seyn, weil sonst auch die genannten Winkel gleich wären (I, 5.). Folglich sind sie dermafsen ungleich, dafs dem gröfsern Winkel die gröfsere Seite gegenüberliegt. — Vgl. Proclus in Chrestom. geom. p. 256. nr. 2.

§. 194. (*Fig.* 99.) Anderer Beweis bei Campanus, ohne I, 18. vorauszusetzen. Es sey im Dreieck ABC der Winkel ABC>ACB: so wird die AC>AB seyn. Denn sie kann nicht =AB seyn: sonst wäre Winkel ABC=ACB (I, 5.): aber auch nicht <AB: sonst wäre, wenn man von der gröfsern AB die AD=AC abschneidet (I, 3.), und CD zieht, Winkel

ACD=ADC (I, 5.) >ABC (I, 16.); daher noch viel mehr Winkel ACB>ABC, gegen die Voraussetzung. — Dieser indirecte Beweis besteht, wie der Euklidische, aus zwei Theilen, deren erster, auf I, 5. beruhend, mit dem ersten Euklidischen einerlei ist; der zweite aber von dem Euklidischen zweiten nur darin sich unterscheidet, dafs statt der Euklidischen Berufung auf I, 18. der Euklidische Beweis von I, 18. selber darin aufgenommen ist. Da sodenn bei Campanus auf den so bewiesenen I, 19. der Euklidische I, 18. nachfolgt, und vermittelst jenes und I, 6. abermals indirect auf ähnliche Art bewiesen wird, wie Euklid I, 19. mittelst I, 18. und 5. beweist: so ist dieser vom Euklidischen abweichende Gang des Arabers für eine gezwungene und unangemessene Künstelei zu halten.

§. 195. a. Anderer, directer Beweis, auf den sich der bei Proclus (Chrestom. geom. p. 256—258.) reducirt, mittelst §. 191, b.

(*Fig.* 87.) Es sey im Dreieck ABC der Winkel C>B. Man halbire die BC in D, ziehe AD, und mache ihr die DE gleich, ziehe BE. So ist (I, 15. 4.) die BE=AC, und Winkel DBE=C also >ABD. Da demnach die BD die Grundlinie AE in gleiche, den Winkel an der Spitze ABE aber in ungleiche Theile theilt: so sind (§. 191, b,) die Seiten AB, BE ungleich, und diejenige AB die gröfsere, welche an dem kleinern Theil ABD des Winkels an der Spitze liegt; das ist, AB>BE. Der BE ist aber die AC gleich. Also AB>AC.

Umgekehrt läfst sich aber auch mittelst I, 19. der S. 196, b. ohne §. 191, a. so beweisen: (*Fig.* 87.) Es halbire die AD die Grundlinie BC des Dreiecks ABC, und theile den Winkel BAC in zwei ungleiche Theile, deren kleinerer BAD sey: so wird die Seite AB die gröfsere seyn. Denn man verlängere AD, mache ihr die DE gleich, ziehe BE. So ist (I, 15. 4.) die BE=AC, und Winkel BED=DAC. Da nun Winkel DAC>BAD (Vorauss.): so ist auch Winkel BEA>BAE. Folglich (I, 19.) BA>BE das ist >AC.

b. Hiebei läfst sich noch folgender Zusatz zu §. 190., Converse von §. 191, a. bemerken. (*Fig.* 96, b.) „Wenn in einem Dreieck ABC, dessen zwei Seiten AB, AC ungleich sind, eine gerade Linie AD den Winkel BAC an der Spitze halbirt: so theilt sie die Grundlinie in zwei ungleiche Abschnitte, von welchen der gröfsere CD an der gröfsern Seite AC liegt."

Denn man verlängere die AB, bis AF=AC; und ziehe CF: so ist (I, 4.) DC=DF, und Winkel C=F. Da nun Winkel DBF als Aufsenwinkel >C (I, 16.): so ist er auch >F; folglich (I, 19.) DF>DB, und daher auch DC>DB. — Ohne I, 19. läfst sich dieser Satz indirect beweisen mittelst §. 169, 1. (wornach, wenn CD, DB gleich wären, auch AB, AC gleich wären), und §. 191, a. (wornach, wenn DB>DC wäre, auch AB>AC wäre). Diesen Beweis hat Clavius in seinen Anm. zu I, 19. — Den Satz nebst dem in §. 190. bemerkt auch Halley (zwar nur implicite); vgl. Lib. I. Prop. XXX. und das Ende des I. B. von Menelai Sphaericis. Oxon. 1758.

Andere Sätze von Theilung gleichschenklichter sowohl als ungleichschenklichter Dreiecke durch eine von der Spitze an die Grundlinie gezogene gerade Linie, deren Beweise jedoch zum Theil nachfolgende Sätze von I, 20. bis 26. voraussetzen, finden sich in Chrestom. geom. S. 337 — 360.

§. 196. Den Euklidischen Ausdruck betreffend, ist hier das ähnliche wie §. 185. bei Satz XVIII. zu bemerken.

Ferner fällt auf, dafs die Aussagen des 18ten und 19ten sich von einander, aufser dem unbedeutenden ὑπο beim Accusativ (indem ὑποτεινει γωνιαν, und ὑποτεινει ὑπο γωνιαν, gleichbedeutend sind (Chrestom. geom. p. 186. Savil. p. 188.)), blofs durch die Stellung des Casus rectus und obliquus unterscheiden. Im Deutschen etwa so: Satz 18.: „In jedem Dreiecke liegt der gröfsern Seite auch ein gröfserer Winkel gegenüber." Satz 19.: „In jedem Dreiecke liegt der gröfsere Winkel auch einer gröfseren Seite gegenüber." Nämlich das vorgesetzte Gröfsere ist der Bedingung nach als gröfser zu denken, das nachgesetzte als Folge.

§. 197. Anderer Ausdruck: „Wenn in einem Dreiecke die Winkel an der Grundlinie ungleich sind: so sind auch seine Schenkel ungleich; und zwar derjenige gröfser, der an dem kleinern Winkel liegt" (oder „der dem gröfsern Winkel gegenüberliegt.").

Ohne das Wort Dreieck: „Wenn zwei an die Endpunkte einer geraden Linie von einem Punkt aufserhalb derselben gezogene gerade Linien ungleiche Winkel mit ihr machen: so sind dieselbe ungleich; und diejenige ist gröfser, welche den kleinern Winkel mit ihr macht."

§. 198. Folgerungen und Anwendungen des Satzes XIX.:

1) „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck der Winkel an der Spitze gröfser ist als einer der Winkel an der Grundlinie (und also auch gröfser als der andere): so ist seine Grundlinie gröfser als jeder der gleichen Schenkel: und wenn er kleiner ist, kleiner."

2) „Ein ungleichwinklichtes Dreieck ist ungleichseitig: und zwar ist in demselben die Gegenseite des gröfsten Winkels die gröfste; die Gegenseite des mittlern Winkels die mittlere; die Gegenseite des kleinsten Winkels die kleinste."

3) „In einem rechtwinklichten Dreieck ist des rechten; in einem stumpfwinklichten des stumpfen Winkels Gegenseite gröfser als jede der zwei übrigen Seiten;" weil nämlich auch der rechte oder stumpfe Winkel eines Dreiecks gröfser als jeder der beiden übrigen Winkel ist (§. 174.): daher das Behauptete aus I, 19.

§. 199. a) (*Fig.* 100.) „Das aus einem Punkt A aufserhalb einer geraden Linie BC auf dieselbe gefällte Perpendikel AD ist kleiner als jede andere gerade Linie, die von dem nämlichen Punkt A an dieselbe gerade Linie gezogen wird." — Denn man ziehe irgend eine solche AE: so ist das Dreieck ADE rechtwinklicht, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite AE gröfser als die AD (§. 198, 3)).

b) „Die von einem Punkt A aufserhalb einer geraden Linie BC an einer Seite des aus diesem Punkt auf dieselbe gefällten Perpendikels AD gezogenen schiefen geraden Linien sind alle unter einander ungleich; nämlich jede dem Perpendikel AD näher liegende AE ist kleiner als die weiter von demselben entfernte AF." — Denn der Winkel AEF ist als Aufsenwinkel des Dreiecks ADE gröfser als der rechte ADE (I, 16.); mithin das Dreieck AEF stumpfwinklicht, und die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite AF gröfser als die AE (§. 198, 3)).

c) „Unter den von einem Punkt A aufserhalb einer geraden Linie BC auf beiden Seiten des aus diesem Punkt auf sie gefällten Perpendikels AD an dieselbe gezogenen schiefen geraden Linien sind je zwei AG, AE einander gleich, welche an die Endpunkte G, E gleicher von dem Perpendikel an auf jener geraden Linie genommener Abschnitte DG, DE gezogen werden (I, Def. 10, I, 4.); aber nur diese;" weil nämlich jede andere an einerlei Seite mit der AG oder mit der AE gezogene der AG oder AE ungleich ist (b.).

§. 200. a. Die Entfernung eines aufserhalb einer geraden Linie liegenden Punkts von dieser geraden Linie wird nach der gemeinen Sprache angegeben durch die kürzeste gerade Linie, die sich von dem Punkt an die gerade Linie ziehen läfst. Da nun das von dem Punkt auf die gerade Linie gefällte Perpendikel die kürzeste gerade Linie ist, die sich von dem Punkt an dieselbe ziehen läfst (§. 199, a.): so gibt dieses Perpendikel die Entfernung des Punkts von der geraden Linie an. Vergl. III, Def. 4. 5.

b. Die Höhe eine Dreiecks wird angegeben durch die kürzeste gerade Linie, welche von seiner Spitze an seine Grundlinie geht; diese ist aber das von der Spitze auf die Grundlinie fallende Perpendikel (§. 199, a.): also dieses Perpendikel gibt die Höhe des Dreiecks an. Es fällt aber entweder mit einer Seite des Dreiecks zusammen, wenn nämlich diese mit der Grundlinie einen rechten Winkel macht; oder, macht eine Seite einen stumpfen Winkel mit der Grundlinie, so fällt es aufserhalb des Dreiecks nächst eben dieser Seite; machen aber beide Seiten spitzige Winkel mit der Grundlinie, so fällt es innerhalb des Dreiecks (§. 177, 2.)).

§. 201. (*Fig.* 101.) a. „Von einem Punkt A aufserhalb einer geraden Linie BC lassen sich an dieselbe nur je zwei gleiche gerade Linien ziehen."

Denn gesetzt, es lassen sich drei gleiche ziehen, und zwei derselben seyen AD, AE: so fällt die dritte entweder zwischen AD und AE, oder aufserhalb an die Seite einer von ihnen. Es ist aber beides unmöglich: denn man halbire die DE in F, und ziehe AF: so ist diese senkrecht auf der BC (I, 8. Def. 10.), und mithin (§. 199, a.) kleiner als die AD oder AE; auch ist jede der AF näher als die AD oder AE liegende kleiner als diese (§. 199, b.): folglich kann zwischen AD und AE keine dritte ihnen gleiche fallen. Es kann aber auch keine solche aufserhalb nach der Seite A, B oder nach der Seite A, C hin fallen: weil jede von A über AD hinausfallende, als vom Perpendikel AF entfernter, gröfser ist als die ihm nähere AD (§. 199, b.), und ebenso jede über die AE hinausfallende gröfser ist als die AE. Demnach ist es unmöglich, dafs von A mehr als zwei gleiche gerade Linien an die BC gehen. — Proclus gibt von diesem Satz einen andern Beweis aus I, 16. (Chrestom. geom. p. 251.)

b. Namentlich „wenn von einem Punkt A aufserhalb einer geraden Linie BC zwei gleiche AD, AE an die-

selbe gezogen sind: so ist jede aus demselben Punkt A zwischen ihnen an die erste BC gezogene kleiner; jede ausserhalb an der Seite einer von ihnen gezogene aber gröfser, als jede der zwei gleichen AD, AE.

Dieses ist unter a) bewiesen: und läfst sich auch so ausdrücken und beweisen: (*Fig.* 102.) „Wenn in einem gleichschenklichten Dreieck ABC einer gerade Linie AD von der Spitze A an die Grundlinie BC gezogen wird: so ist dieselbe kleiner als einer der gleichen Schenkel AB, AC. Wird aber eine AE an die Verlängerung der Grundlinie BC gezogen: so ist dieselbe gröfser als einer der gleichen Schenkel." Denn da Winkel ADC als Aufsenwinkel >B (I, 16.) d. i. (I, 5.) >ACD: so ist (I, 19.) AC>AD; das ist, die AD kleiner als einer der gleichen Schenkel. Wiederum da Winkel ACB als Aufsenwinkel >E (I, 16.) aber =ABC (I, 5.): so ist Winkel B>E; folglich (I, 19.) AE>AB d. i. gröfser als einer der gleichen Schenkel.

c. Eine Folgerung hievon ist, was in III, a. dargethan wird: „Von einer zwei auf der Peripherie eines Kreises genommene Punkte verbindenden geraden Linie kann keiner ihrer Zwischenpunkte weder aufserhalb des Kreises noch auf seine Peripherie fallen." Denn wäre dieses: so hätte man, wenn man vom Mittelpunkt aus an die zwei genommenen Punkte und an den angenommenen Zwischenpunkt eine gerade Linie zieht, ein gleichschenklichtes Dreieck, von dessen Spitze an seine Grundlinie eine gerade Linie gezogen wäre, die gröfser als einer der gleichen Schenkel oder ihm gleich wäre; welches nicht möglich ist (b.).

d. Eine andere Folgerung: „Ein Kreis schneidet eine gerade Linie nur in zwei Punkten." Denn die gerade Linie geht entweder durch seinen Mittelpunkt, oder nicht. 1) Geht sie durch seinen Mittelpunkt: so würden, wenn er sie in drei Punkten schnitte, die an diese drei Punkte vom Mittelpunkt ausgehenden Stücke derselben einander gleich seyn (Def. 15.). Es ist aber unmöglich, dafs von einem Punkt einer geraden Linie an drei andere Punkte derselben gleiche Stücke gehen, weil eines derselben ein Theil eines der übrigen seyn wird, und also kleiner als dieses. Folglich kann der Kreis eine durch seinen Mittelpunkt gehende gerade Linie nicht in mehr als zwei Punkten schneiden. 2) Geht sie nicht durch seinen Mittelpunkt: so würden, wenn er sie in mehr als zwei Punkten schnitte, wiederum die vom Mit-

telpunkt aus an diese Punkte gehenden geraden Linien einander gleich seyn (Def. 15.); also von einem Punkt aufserhalb einer geraden Linie mehr als zwei gleiche gerade Linien an dieselbe gehen; welches nicht möglich ist. (a). Folglich u. s. w.

Man kann dieses für den zweiten Fall auch aus c) folgern. Denn schnitte ein Kreis eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende gerade Linie in drei Punkten: so sind unter diesen zwei äufsere und ein Zwischenpunkt; und es würde dieser Zwischenpunkt der besagten geraden Linie, welche die zwei äufsern Punkte, welche auf seiner Peripherie sind, verbindet, ebenfalls auf seine Peripherie fallen: welches nach c) unmöglich ist.

§. 202. (*Fig.* 103.) Auch „wenn von einem Punkt A aufserhalb einer geraden Linie zwei ungleiche gerade Linien AB, AC an die erste gehen: läfst sich zwischen den ungleichen keine an die erste ziehen, welche der gröfsern AC derselben gleich, oder gröfser als sie wäre. Und aufserhalb der ungleichen an der Seite der gröfsern läfst sich keine an die erste ziehen, welche der gröfsern AC gleich oder kleiner als sie wäre."

Nämlich „wenn in einem Dreieck ABC, dessen Seiten AB, AC ungleich sind, eine gerade Linie AD von der Spitze A an die Grundlinie BC gezogen wird: so ist diese kleiner als die gröfsere Seite AC des Dreiecks. Und wenn von der Spitze A an die Verlängerung der Grundlinie BC über die gröfsere Seite AC hinaus eine gerade Linie AE gezogen wird: so ist dieselbe gröfser als die gröfsere Seite AC." — Denn da die AC>AB, so ist (I, 18.) Winkel B>ACB. Aber Winkel ADC als Aufsenwinkel >B (I, 16.): folglich noch viel mehr Winkel ADC>ACD; und daher (I, 19.) AC>AD. Wiederum ist der Winkel ACB als Aufsenwinkel >E (I, 16.): aber Winkel ABC>ACB; folglich noch viel mehr Winkel ABC>E. Aber der Winkel ACE als Aufsenwinkel ist >ABC: folglich noch vielmehr Winkel ACE>E; mithin (I, 19.) AE>AC. — Oder da Winkel ABC>ACB, so ist ACB spitzig (§. 174.): folglich ACE stumpf (I, 13.): daher (§. 198, 3)) AE>AC.

§. 203. In §. 199, c. war der Satz enthalten:

a) (*Fig.* 100.) „Wenn von einem Punkte A aufserhalb einer geraden Linie BC eine senkrechte AD, und zu beiden Seiten von dieser zwei andere an sie gezogen sind: so sind diese (AE, AG) gleich, wenn sie von der

ersten an beiden Seiten der senkrechten gleiche Stücke (DE, DG) abschneiden":

Ferner aber

b) „sind die zwei andern gezogenen (AF, AG) ungleich, wenn sie von der erstern an beiden Seiten der senkrechten ungleiche Stücke (DF, DG) abschneiden; und diejenige AF ist gröfser, welche das gröfsere Stück (DF>DG) abschneidet." — Denn da die DF>DG, so schneide man die DE=DG ab, und ziehe AE: so ist die AE=AG (a); aber weil Winkel AEF>ADE (I, 16.) ein stumpfer ist, so ist (§. 198, 3) die AF>AE; folglich auch AF>AG.

Hieraus läfst sich nun umgekehrt folgern:

c) „Wenn von einem Punkte A aufserhalb einer geraden Linie BC eine senkrechte AD, und an beiden Seiten von dieser zwei andere an sie gezogen sind: so schneiden diese (AE, AG), wenn sie einander gleich sind, von der ersten an beiden Seiten der senkrechten gleiche Stücke DE, DG ab." — Denn wären diese Stücke ungleich: so wären auch die AE, AG ungleich (nach b).

d) „Wenn sie aber ungleich sind (AF, AG): so schneiden sie ungleiche Stücke (DF, DG) ab; und zwar die gröfsere (AF) ein gröfseres Stück (DF)." — Denn die DF kann der DG nicht gleich seyn; sonst wäre auch die AF der AG gleich (a): noch kleiner; sonst wäre die AF kleiner als die AG (b).

Daher „wenn in einem Dreieck das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel diese ungleich theilt: so sind seine Seiten ungleich; und diejenige gröfser, die an dem gröfsern Abschnitt der Grundlinie liegt."

Und „in einem gleichschenklichten Dreieck fällt das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel innerhalb des Dreiecks (§. 178, a), und halbirt die Grundlinie." „In einem ungleichschenklichten Dreieck aber wird die Grundlinie durch das auf sie aus der Spitze gefällte Perpendikel, wenn es innerhalb des Dreiecks fällt, in ungleiche Abschnitte getheilt; und an der gröfseren Seite liegt der gröfsere Abschnitt."

§. 204. a. (*Fig.* 104.) Wenn innerhalb eines recht- oder stumpfwinklichten Dreiecks ABC von einer der den rechten oder stumpfen Winkel BAC einschliefsenden Seiten AB, AC an die andere eine gerade Linie gezogen wird: so ist dieselbe kleiner als die dem genannten Winkel gegenüberliegende Seite BC."

Fall I. Denn sie werde erstlich aus einem der übrigen Winkel ABC gezogen, wie die BD. Da nun der Winkel BDC>BAC (I, 16.), also ein stumpfer ist: so ist (§. 198, 3) die BC>BD.

Fall II. Sie werde aus keinem der übrigen Winkel gezogen; wie die DE; und man ziehe BD. So ist im Dreieck ABD wiederum nach Fall I. die BD>DE; aber auch die BC>BD: folglich BC>DE.

b. „Wenn an eine gerade Linie AC von einem Punkt B aufserhalb derselben eine, die mit ihr einen stumpfen Winkel macht, BA, und an der Seite von dieser, an welcher sie diesen Winkel macht, andere BF, BD, BC gezogen sind: so ist unter diesen jede der ersten nähere kleiner als die entferntere," die BF<BD, die BD<BC. — Folgt wiederum aus §. 193, 3), weil die Winkel BFC, BDC gröfser als BAC (I, 16.), und da dieser stumpf ist, ebenfalls stumpf sind.

§. 205. (*Fig.* 105.) Unter allen geraden Linien, welche von einem und demselben Punkt B ausgehen, ist von einem aufserhalb derselben liegenden Punkte A diejenige BC am weitesten entfernt, welche mit der die beiden Punkte verbindenden AB einen rechten Winkel macht; unter den übrigen aber immer diejenige BD, die mit der AB einen gröfsern spitzen Winkel macht, weiter entfernt als diejenige BE, die einen kleinern Winkel mit ihr macht.

Denn 1) man fälle von A auf die BD das Perpendikel AE, welches an die Seite des spitzen Winkels ABD fällt (§. 176, b): so ist das Dreieck ABF rechtwinklicht, also AB>AF (§. 198, 3). Es heifst aber diejenige gerade Linie vom Punkt A weiter entfernt, auf welche von A ein gröfseres Perpendikel fällt (§. 200.). Folglich ist in die BC weiter von A entfernt als die BD.

2) Die AF schneide die BE in G. Da der Winkel AFB ein rechter ist: so ist (I, 17.) der Winkel BGF und daher auch (I, 15.) AGE spitzig; daher wird ein von A auf die BE gefälltes Loth an die Seite des spitzen Winkels AGE fallen (§. 176, b): man fälle es, und es sey AH. So ist in dem bei A rechtwinklichten Dreieck AGH die AG>AH, also noch mehr die AF>AH; das ist, das von A auf die BD fallende Perpendikel gröfser als das auf die BE fallende; mithin die BD weiter von A entfernt als die BE.

§. 206. Das in §§. 63. 66. zur Frage gebrachte läfst sich nun näher so bestimmen:

a. (*Fig.* 31, a.) „Wenn auf einerlei Grundlinie BC und an einerlei Seite derselben ein gleichschenklichtes Dreieck ABC und ein anderes DBC stehen, dessen eine Seite BD einen Schenkel AC des gleichschenklichten schneidet: so ist dieses letztere DBC ungleichschenklicht, und die genannte BD ist seine gröfsere Seite." — Denn da Winkel ACB=ABC (I, 5.): so ist Winkel DCB>DBC; und mithin (I, 19.) DB>DC.

b. (*Fig.* 34.) „Wenn auf einerlei Grundlinie BC und an verschiedenen Seiten derselben zwei Dreiecke stehen, deren eines ABC gleichschenklicht ist, und eine Seite CD des andern DBC die Verlängerung BE eines Schenkels des ersten schneidet: so ist dieses andere Dreieck ungleichschenklicht, und die genannte CD ist seine gröfsere Seite." — Denn da die AC verlängert nach F, Winkel EFC=BCF (I, 5.): so ist Winkel DBC >DCB; und mithin (I, 19.) DC>DB.

§. 207. (*Fig.* 106.) „Wenn auf eine gerade Linie BC aus einem Punkt A aufserhalb derselben ein Perpendikel AD gefällt ist, und aus demselben Punkt als Mittelpunkt mit einem Radius, der gröfser ist als das Perpendikel AD, ein Kreis beschrieben wird: so schneidet derselbe die gerade Linie BC an beiden Seiten des Perpendikels AD, an jeder in einem Punkt." — Denn man verlängere die AD, und mache die AE dem Radius gleich: so geht die Peripherie des Kreises durch den Punkt E (§. 17.). Da nun dieser Punkt an der andern Seite der BC liegt als sein Mittelpunkt A: so schneidet der Kreis die BC (Ax. 2te Kl. Anh. nr. 5.): es geschehe in F, und man ziehe AF; so ist die AF=AE. Man nehme auch DG=DF, und ziehe AG: so ist (I, 4.) die AG=AF=AE. Folglich geht der Kreis auch durch G (§. 17.), das ist, durch einen Punkt, welcher an der andern Seite des Perpendikels AD als der Punkt F liegt: er schneidet also die BC an beiden Seiten des Perpendikels. Er schneidet sie aber nur in diesen zwei Punkten (§. 201, d.).

§. 208. a. (*Fig.* 107, a.) „Wenn an eine gerade Linie BC aus einem Punkt A aufserhalb derselben eine gerade Linie AD schief gezogen ist; und aus demselben Punkt als Mittelpunkt mit einem Radius, der gröfser als die schiefgezogene AD ist, ein Kreis beschrieben wird: so schneidet derselbe die erste gerade Linie BC an beiden Seiten der schiefen AD, an jeder in einem Punkt." — Denn man verlängere die AD nach E, und mache die

AE dem genannten Radius gleich: so geht die Peripherie des Kreises durch den Punkt E (§. 17.). Und da dieser Punkt an der andern Seite der BC liegt als sein Mittelpunkt A: so wird er die BC schneiden (Ax. Anh. nr. 5.): und zwar, wenn man das Perpendikel AF fällt, welches auf die Seite des spitzigen Winkels ADC fallen wird (§. 176, b), an beiden Seiten dieses Perpendikels. Er schneide sie an der Seite gegen C in G: so ist die AG der AE gleich, und mithin $>$AD: daher auch FG$>$FD (§. 203, d). Man mache die FH=FG: so ist auch (I, 4.) AH=AG=AE, und folglich geht der Kreis auch durch H (§. 17.). Er schneidet also die BC in den zwei an beiden Seiten der AD liegenden Punkten G, H; und nur in diesen (§. 201, d).

b. (*Fig.* 107, b.) Unter derselben Voraussetzung; „wenn aus demselben Punkt A als Mittelpunkt mit einem Radius, der kleiner als die schief gezogene AD, aber gröfser als die senkrechte AE ist, ein Kreis beschrieben wird; so schneidet derselbe die erste gerade Linie BC an derjenigen Seite der schiefen AD, wo diese mit der BC einen spitzen Winkel macht, in zwei Punkten." — Denn die senkrechte AE fällt auf die Seite des spitzen Winkels ADC (§. 176, b). Man verlängere sie, und mache die AF dem genannten Radius gleich: so ist sie also $<$AD; der genannte Kreis wird aber durch F gehen, und die BC an beiden Seiten der AE schneiden: er schneide sie an der Seite gegen C zu, in G. So ist AG=AF$<$AD; daher auch EG$<$ED (§. 203, d). Man schneide die EH=EG ab; so ist auch (I, 4.) AH=AG=AE; und folglich geht der Kreis auch durch H (§. 17.). Er schneidet also die BC in zwei an einerlei Seite der schiefstehenden AD liegenden Punkten H, G.

Aufgaben.

§. 209. 1) (*Fig.* 106.) „An eine gegebene unbegränzte gerade Linie BC von einem aufserhalb derselben gegebenen Punkt A eine gerade Linie ziehen, die einer gegebenen M gleich sey. Die gegebene M darf aber nicht kleiner seyn als die von A auf die BC fallende senkrechte."

Man fälle die senkrechte AD: ist nun diese der M gleich, so ist das Verlangte geschehen; es ist nämlich von A die AD der gegebenen M gleich an die BC ge-

gogen. Und dieses ist die einzige, die der M gleich an die BC gezogen werden kann; denn jede andere gezogene ist gröſser (§. 199, a).

Wäre aber die AD gröſser als die M; oder die gegebene M kleiner als die AD: so wäre die Aufgabe unmöglich; denn es läſst sich keine, die kleiner als die senkrechte AD ist, an die BC ziehen (§. 199, a).

Ist die AD kleiner als die M: so verlängere man sie, und mache die AE der M gleich, und beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AE einen Kreis: so wird dieser die BC in zwei Punkten schneiden (§. 207.); es sey in F und G: man ziehe AF und AG; so werden diese die Aufgabe auflösen. Und auſser diesen keine; weil von einem Punkt an eine gerade Linie nicht mehr als zwei gleiche gerade Linien gehen (§. 201, d).

2) (*Fig.* 108, a.) „An eine gegebene an einer Seite (in B) begränzte, an der andern (nach C) unbegränzte gerade Linie BC aus einem auſserhalb derselben gegebenen Punkte A eine gerade Linie ziehen, die einer gegebenen M gleich sey."

Man ziehe die AB. Ist nun diese

I. Fall) auf der BC senkrecht: so ist, wenn die M<AD, die Aufgabe unmöglich. Ist sie =AB: so löst die AB allein die Aufgabe. Ist sie >AB: so läſst sich (nach 1) an die BC, die hier ganz an der einen Seite des Perpendikels AB liegt, eine der M gleiche gerade Linie ziehen; man ziehe sie (nach 1), und es sey die AD. So wird diese die Aufgabe allein lösen, indem jede andere an die BC gezogene gröſser oder kleiner als die AD d. i. als die M ist (§. 199, b.).

II. Fall. Macht die AB mit der BC einen stumpfen Winkel: so ist, wenn die M nicht gröſser als die AB ist, die Aufgabe unmöglich: denn jede von A an die BC gezogene ist wegen des stumpfen Winkels ABC gröſser als die AB (§. 198, 3)). Ist aber die M gröſser als die AB: so mache man ihr, indem man AB verlängert, die AE gleich, und beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AE einen Kreis; der die BC schneiden wird (§. 208, a); es geschehe in D: so wird AD die verlangte seyn. Und sie wird die Aufgabe allein auflösen; denn jede der AB nähere ist gröſser, jede von der AB entferntere kleiner als die AB (§. 204, b.).

III. Fall. Macht die AB mit der BC einen spitzen Winkel; und ist

a) die M der AB gleich: so beschreibe man einen Kreis aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB. Und da der Winkel ABC spitzig ist: so wird das Perpendikel von A auf die BC gefällt, die BC treffen (§. 176, b.), und der Kreis der BC an der andern Seite des Perpendikels, als an welcher AB liegt, noch einmal begegnen (§. 207.). Es geschehe in D; so wird die AD die Aufgabe lösen; und zwar allein, weil jede dem Perpendikel nähere kleiner, jede entferntere gröfser ist als die AB oder AD.

b) Ist die M gröfser als die AB: so verlängere man die AB nach E, und nehme die AE der M gleich, und beschreibe aus A mit der Weite AE einen Kreis; so wird dieser (nach §. 208, b.) der BC einmal begegnen; es geschehe in D: so löst die AD die Aufgabe.

c) (*Fig.* 108, b.) Ist die M kleiner als die AB: so fälle man von A auf die BC das Perpendikel AE (I, 12, §. 176.): so ist entweder

aa) die M auch kleiner als die AE; und dann ist die Aufg. unmöglich;

bb) oder die M der AE gleich; und dann löst die AE allein die Aufgabe;

cc) oder die M gröfser als die AE. So verlängere man die AE, und mache die AF der M gleich; so ist also die AF auch $<$AB. Und man beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AF einen Kreis; so schneidet derselbe (nach §. 207, b.) die BC in zwei Punkten; sie seyen G, H: so werden die zwei AG, AH gezogen, die Aufgabe lösen: und aufser ihnen keine dritte.

107. Mit dieser ist einerlei die Aufgabe: Mit einer gegebenen Seite AB und Winkel ABC an der Grundlinie ein Dreieck beschreiben, dessen andere Seite einer gegebenen geraden Linie M gleich sey.

3) (*Fig.* 102, 103.) „An eine gegebene an beiden Seiten begränzte gerade Linie BC von einem aufserhalb derselben gegebenen Punkt A eine gerade Linie ziehen, die einer gegebenen M gleich sey." Oder, wenn man die AB, AC zieht, mit andern Worten: „In einem gegebenen Dreieck ABC (innerhalb) aus seiner Spitze A an die Grundlinie BC eine der gegebenen M gleiche gerade Linie ziehen."

Fall I. (*Fig.* 102.) Wenn die AB, AC gleich sind, und

a) die M gröfser als sie: so ist die Aufgabe unmöglich: denn es läfst sich aus einem Punkt an eine gerade

Linie zwischen zwei gleichen keine gröfsere ziehen (§. 201. b.), Ebenso, wenn die M ihnen gleich wäre.

b) Ist die M kleiner als die AB oder AC, und auch kleiner als das von A auf die BC fallende Perpendikel: so ist die Aufg. wiederum unmöglich, weil keine kleinere als das Perpendikel gezogen werden kann. Ist sie aber gröfser als das Perpendikel: so lassen sich zwei der M gleiche von A an die BC ziehen (nach 2) III. Fall, c, cc).

Fall II. (*Fig.* 103.) Wenn die AB, AC ungleich sind; und

a) die M der gröfseren von ihnen gleich oder noch gröfser: so ist die Aufg. unmöglich; weil jede von einem Punkt an eine gerade Linie zwischen zwei ungleichen gezogene kleiner als die gröfsere von ihnen ist (§. 202.);

b) die M kleiner als die gröfsere, und gröfser als die kleinere von ihnen: so läfst sich immer eine ziehen, die der Forderung Genüge leistet; aber auch nur eine;

c) die M der kleineren gleich: so ist die Aufg. unmöglich, wenn die kleinere mit der BC einen rechten oder stumpfen Winkel macht; denn in diesem Fall ist jede von der Spitze innerhalb des Dreiecks an die Grundlinie gezogene gröfser als die kleinere von ihnen; ist aber jener Winkel spitzig: so läfst sich Eine ziehen.

d) die M kleiner als die kleinere aber gröfser als das von A auf die BC fallende Perpendikel: so lassen sich immer zwei ziehen, welche der Aufg. Genüge leisten.

e) die M dem Perpendikel gleich: so löst eben das Perpendikel die Aufg.

f) die M kleiner als das Perpendikel: so ist die Aufg. unmöglich.

§. 210. Andere Aufgaben: „Ein rechtwinklichtes Dreieck beschreiben, von dessen Seiten, der dem rechten Winkel gegenüberliegenden und einer der denselben einschliefsenden, die eine gegeben, die andere einer gegebenen geraden Linie gleich sey." Diese Aufg. hat zwei Theile:

I. Theil. (*Fig.* 109.) „Auf der gegebenen geraden Linie AB ein bei B rechtwinklichtes Dreieck beschreiben, dessen dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite der gegebenen geraden Linie C gleich sey. Es mufs aber diese gröfser als die AB seyn." — Man verlängere die AB, und mache die AD der C gleich, errichte auf ihr die BE senkrecht, und beschreibe aus

dem Mittelpunkt A mit der Weite AD einen Kreis, der die BE schneiden wird (Ax. Anhang); er schneide sie in F; und man ziehe die AF. So ist AFB das verlangte Dreieck.

II. Theil. (*Fig.* 110.) „Auf der gegebenen geraden Linie AB ein Dreieck beschreiben, dessen der AB gegenüberliegender Winkel ein rechter, die in A sich endigende Seite aber der gegebenen C gleich sey. Es mufs aber diese kleiner als die AB seyn." — Man schneide von der gröfsern AB die der C gleiche AD ab, errichte auf der AB in D die DE senkrecht, beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB einen Kreis, welcher die DE in F schneide; ziehe AF, schneide von ihr die AG=AD ab, und ziehe GB. So wird GAB das verlangte Dreieck seyn. — Beweis mittelst I, 4.

Da im gleichschenklichten Dreieck das von der Spitze gefällte Perpendikel die Grundlinie halbirt, und das Dreieck in zwei rechtwinklichte Dreiecke theilt: so läfst sich vermittelst der vorhergehenden auch die Aufgabe auflösen:

„Ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen ein Schenkel und entweder die Grundlinie, oder das auf sie von der Spitze fallende Perpendikel, das eine gegeben, das andere einer gegebenen geraden Linie gleich sey." Bestimmung dabei; weil in jedem gleichschenklichten Dreiecke ein Schenkel gröfser ist als die halbe Grundlinie (zu Folge §§. 125. 198, 3)).

§. 211. a. (*Fig.* 111.) „An eine gegebene gerade Linie AB in einem auf ihr gegebenen Punkt A einen Winkel anlegen, der einem gegebenen Winkel DCE gleich sey." — Man halbire den Winkel DCE durch die CF, schneide von seinen Schenkeln die CD, CE beliebig gleich ab, ziehe DE, auf welcher die CF senkrecht stehen wird (I, 4.): schneide von der AB die AG=CF ab, und errichte auf ihr in G die GH=DF senkrecht, ziehe AH, und fälle von G auf AH das Perpendikel GJ, welches wegen des rechten Winkels bei G ebenfalls innerhalb fällt (§. 177, 2): Man verlängere die GJ, mache ihr die JK gleich, und ziehe AK: so wird der Winkel BAK dem DCE gleich seyn. Denn der Winkel GAH ist =DCF (I, 4.): und vom Winkel GAH ist der GAK das Doppelte (I, 4), vom Winkel DCF der DCE (Constr.); folglich ist auch der BAK dem DCE gleich.

b. (*Fig.* 112.) „Auf einer gegebenen unbegränzten BC und an eine aufserhalb derselben gegebene Spitze A ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen Schenkel einer gegebenen D gleich seyen. Es mufs aber die D gröfser seyn als das von A auf die BC gefällte Perpendikel." Auflösung mittelst §. 209.

Oder „ein gleichschenklichtes Dreieck mit gegebener Spitze A und einem Endpunkt G der Grundlinie beschreiben, und dessen Grundlinie auf einer gegebenen geraden Linie BC liege."

c. (*Fig.* 113.) „Auf einer gegebenen Grundlinie AB ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen Schenkel einer gegebenen C gleich sey. Die C mufs aber gröfser als die Hälfte der AB seyn." — Man halbire die AB in D, errichte auf ihr die DE senkrecht, schneide von der AB, verlängert, wenns nöthig ist, die AF=C ab, beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AF einen Kreis, der die DE in G schneide; ziehe GB: so wird GAB das verlangte Dreieck seyn.

§. 212. (*Fig.* 114.) 1) „Auf einer gegebenen unbegränzten geraden Linie BC und mit gegebener Spitze A ein Dreieck beschreiben, dessen

a) eine Seite und die Grundlinie zwei gegebenen geraden Linien D, E, je eine einer, gleich seyen. Die D mufs aber gröfser seyn als das von A auf die BC fallende Perpendikel;"

b) „dessen eine Seite und der zwischen der andern Seite und dem auf die Grundlinie aus der Spitze A fallenden Perpendikel liegende Abschnitt der Grundlinie zwei gegebenen geraden Linien D, E, je eines einer, gleich sey. Es mufs aber die D gröfser seyn als das von A auf die BC fallende Perpendikel."

Fall I. Wenn das Perpendikel innerhalb des Dreiecks fallen soll;

Fall II. Wenn das Perpendikel aufserhalb, und zwar nächst der der D gleich werden sollenden Seite fallen soll;

Fall III. Wenn das Perpendikel aufserhalb, und zwar nächst der andern Seite fallen soll.

c) „dessen zwei Seiten zweien gegebenen geraden Linien D, E, je eine einer, gleich seyen. Es darf aber von den beiden D, E keine kleiner als das von A auf die BC fallende Perpendikel, und wenigstens die eine derselben mufs gröfser als dieses Perpendikel seyn." Wenn beyde gröfser, und unter sich ungleich sind: so

wird man vier Dreiecke erhalten die der Aufgabe Genüge thun.

d) „dessen Grundlinie und die an deren Halbirungspunkt von der Spitze A gezogene gerade Linie zweien gegebenen E, D, je eine einer, gleich seyen. Die D darf aber nicht kleiner als das Perpendikel von A auf die BC seyn."

e) „dessen eine Seite und der Unterschied der zwei Abschnitte, in welche das Perpendikel die Grundlinie theilt, zweien gegebenen D, E gleich seyen."

2) „Mit gegebener Grundlinie und einem anliegenden Winkel ein Dreieck beschreiben, in welchem die von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gezogene gerade Linie einer gegebenen gleich sey."

Satz XX.

§. 213. A) Zum Beweise dieses Satzes kann man jeden der drei Theile folgenden Satzes gebrauchen:

(*Fig.* 115.) „Wenn aus einem Winkel B an der Grundlinie BC eines gleichschenklichten Dreiecks ABC eine gerade Linie

1) an die Verlängerung der Gegenseite AC über die Spitze A hinaus gezogen wird, wie die BD: so ist sie kleiner als die zwischen ihr und der Grundlinie liegende verlängerte Gegenseite CD;

2) Wird sie aber an die Gegenseite AC fallen, wie die BE;

3) oder an deren Verlängerung unter die Grundlinie gezogen, wie die BF: so ist sie gröfser als das zwischen ihr und der Grundlinie liegende Stück (CE oder CF) der Gegenseite oder ihrer Verlängerung."

Beweis für 1): Da Winkel ABC=ACB (I, 5.): so ist Winkel DBC>DCB; mithin (I, 19.) DC>DB.

Für 2): Da Winkel ACB=ABC (I, 5.) >CBE: so ist (I, 19.) BE>EC.

Für 3): a) Man verlängere AB nach G: so ist Winkel FCB=CBG (I, 5.) >CBF: also (I, 19.) FB>FC.

b) Oder da des gleichschenklichten Dreiecks Aufsenwinkel BCF stumpf ist (§. 175, b)): so ist (§. 198, 3.) die BF>CF. (So Pfleiderer. s. Chrestom. geom. S. 312.)

c) Oder da Winkel ACB>CBF (als Aufsenwinkel des Dreiecks BCF) (I, 16.), und Winkel BCF>CBA aus ähnlichem Grunde: so sind die Winkel BCF, BCA zusammen gröfser als die Winkel CBF, CBA zusammen.

Von diesen ist aber Winkel BCA=CBA (I, 5.). Folglich ist (Ax. 5.) Winkel BCF>GBF: daher (I, 19.) BF>CF. (So Proclus ebend. S. 260. oben.)

B) (Fig. zu I, 20. in d. Uebers.) Es sey nun irgend ein Dreieck ABC, und irgend eine Seite desselben, BC: so ist zu beweisen, dafs die BA, AC zusammen gröfser als die BC sind.

1. Beweis mittelst A, 1.: Man verlängere BA nach D, mache AD=AC, ziehe CD. So ist ADC ein gleichschenklichtes Dreieck, dessen Grundlinie DC; und von dessen Winkel C an der Grundlinie ist an die Verlängerung der Gegenseite DA über die Spitze A hinaus, die gerade Linie CB gezogen: diese ist nun (nach A, 1.) kleiner als die zwischen ihr und der Grundlinie liegende DB; oder die DB, das ist, die DA, AB zusammen, gröfser als die BC. — Dieses ist der Euklidische Beweis in andern Worten dargestellt.

2. Beweis mittelst A, 3.: Wenn die BC nicht gröfser ist als jede der beiden BA, AC: so sind offenbar die beiden BA, AC zusammen >BC. (*Fig.* 116, a.) Ist aber die BC gröfser als jede von jenen beiden: so schneide man von ihr die BE=BA ab, und ziehe AE. So ist BAE ein gleichschenklichtes Dreieck, und von einem Winkel A an seiner Grundlinie AE ist an die unter die Grundlinie verlängerte Gegenseite BE die gerade Linie AC gezogen: diese ist nun (nach §. A, 3.) gröfser als das zwischen ihr und der Grundlinie liegende Stück der Verlängerung der Gegenseite, d. i. die CE. Man setze die gleichen BA, BE hinzu: so sind BA, AC zusammen >BC. (Vgl. Proclus Chrest. geom. p. 260.)

3. Beweis mittelst A, 2.: (*Fig.* 116, b.) Wenn die BC nicht gröfser ist u. s. w. (wie vorhin.) Ist aber die BC gröfser als jede der beiden BA, AC: so verlängere man die BA nach F, so dafs BF=BC sey: und ziehe FC. So ist BFC ein gleichschenklichtes Dreieck, und von einem Winkel C an seiner Grundlinie ist an dessen Gegenseite BF eine gerade Linie CA gezogen: diese ist nun gröfser als das zwischen ihr und der Grundlinie liegende Stück AF (A, 2.): folglich sind die BA, AC zusammen >BF d. i. BC.

Zusatz. „In jedem nicht gleichseitigen Dreiecke ABC ist der Unterschied zweier ungleichen Seiten AB, BC kleiner als die dritte Seite AC." Folgt aus dem 2ten Beweis, wo gezeigt worden, dafs CE<AC; und

CE der Unterschied der Seiten AB, BC ist; oder aus dem 3ten Beweis, wo AF<AC war, und AF der Unterschied der Seite AB, BC ist.

§. 214. Andere Beweise bei Proclus (s. Chrest. geom. p. 259.)

1. (*Fig.* 117.) Man halbire die Winkel BAC durch die AD: so ist Winkel ADB als Aufsenwinkel >DAC (I, 16.) d. i. >BAD; mithin BA>BD (I, 19.). Und ebenso wird gezeigt, dafs CA>CD. Folglich die BA, AC zusammen >BC.

2. (*Fig.* 116, a.) Wären die BA, AC zusammen nicht gröfser als die BC: so sind sie ihr entweder gleich oder kleiner. Sie seyen fürs erste der BC gleich, wenns möglich ist: und man schneide von der BC die BE=BA ab; so wird die CE=CA seyn (Ax. 3.): daher (I, 5.) Winkel BEA=BAE, und Winkel CEA=CAE; folglich die Winkel BEA, CEA zusammen dem Winkel BAC gleich. Die Winkel BEA, AEC zusammen sind aber = 2 rechten (I, 13.). Folglich wäre der Winkel BAC, d. i. ein Winkel eines Dreiecks, =2 rechten; welches unmöglich ist (I, 17. oder §. 141, a.). Demnach können die BA, AC zusammen nicht der BC gleich seyn.

(*Fig.* 118.) Gesetzt nun, sie seyen kleiner als die BC; und man schneide von BC die BD=BA ab, so wird die CA kleiner als die CD seyn (Ax. 5.). Man schneide auch von der CD die CE=CA ab, und ziehe EA. So sind (I, 5.) Winkel BDA=BAD, Winkel CEA=CAE; mithin die Winkel BDA+CEA=BAD+CAE. Da aber auch (I, 16.) Winkel BDA>CAD>CAE, und Winkel BEA>BAE>BAD: so sind die Winkel BDA+CEA >BAD+CAE; welches dem vorigen widerspricht. Mithin können die BA, AC zusammen auch auch nicht kleiner als die BC seyn. Aber auch nicht gleich, wie gezeigt worden ist. Folglich sind sie gröfser.

§. 215. Anderer Beweis. Es sey wiederum BC eines Dreiecks Seite, welche man will: so sind die Winkel bei B und C entweder spitzig oder nicht. Im letztern Fall, d. i. wenn einer ein rechter oder stumpfer ist, ist die ihm gegenüberliegende Seite gröfser als BC (§. 198, 3.); und noch viel mehr sind alsdann beide BA, AC zusammen >BC. Sind aber beide spitzig: so fälle man von A auf die BC das Perpendikel (*Fig.* 92, a.) AD; welches innerhalb fällt (§. 178.): und es ist BA>AD, CA>CD (§. 198, 3.): Folglich BA+AC >BC.

§. 216. Anderer Ausdruck: „In einem gleichschenklichten Dreiecke, dessen Grundlinie gröfser als jeder der gleichen Schenkel ist, ist dieselbe jedoch kleiner als die gleichen Schenkel zusammen: und in einem ungleichseitigen Dreieck ist die gröfste Seite gröfser als die zwei kleinern zusammen." Dieses sind die zwei Hauptfälle des Satzes XX.; die eines Beweises bedürfen: die übrigen Fälle sind für sich offenbar.

„Von einem Punkt zu einem andern ist der Weg auf Einer geraden Linie kürzer, als der Weg auf zwei geraden Linien über einen aufserhalb der ersten gehenden Punkt."

Dieses letztere, und also der Satz XX. selber, haben einige geglaubt, sey für sich klar, und es sey demnach ganz überflüssig, einen Beweis davon zu geben. In der That haben auch einige Verfasser von Lehrbegriffen der Geometrie als Axiom oder auch als Definition angenommen, dafs die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste sey. Simson bemerkt, die richtige Anwort auf die gegen manche Beweise von an sich klaren Sätzen als überflüssig gemachten Einwürfe sey wohl diese: „dafs man die Anzahl der Axiome nicht ohne Noth vermehren müfse." (Matthias Auszug aus R. Sims. Uebers. S. 9.)

Folgerungen.

§. 217. 1. „In einem gleichschenklichten Dreiecke ist jeder der gleichen Schenkel gröfser als die Hälfte der Grundlinie."

2. a) (*Fig.* 119.) „Wenn das auf der Grundlinie BC eines Dreiecks ABC in ihrem Halbirungspunkt D errichtete Perpendikel DE die eine Seite desselben AB zwischen ihren Endpunkten trifft: so ist diese Seite gröfser als die andere AC." — Denn man ziehe die EC: so ist die BE der CE gleich (I, 4.); mithin die BA den beiden CE, EA zusammen gleich: diese sind aber $>$AC (I, 20.): Folglich auch BA$>$AC.

b) Umgekehrt: „Wenn auf der Grundlinie BC eines Dreiecks ABC, dessen zwei Seiten AB, AC ungleich sind, ein Perpendikel in ihrem Halbirungspunkt D errichtet wird: so begegnet dasselbe der gröfsern Seite AB." — Denn auf die Spitze A kann es nicht treffen; sonst wären die Seiten AB, AC gleich (I, 4.): auch kann es nicht der AC begegnen; sonst wäre (a) die AC die gröfsere Seite.

c) „Wenn eine gerade Linie BC durch eine andere DF senkrecht halbirt wird: so liegt in der letztern die Spitze jedes auf der ersten BC errichteten gleichschenklichten Dreiecks." Denn gesetzt es sey irgend ein gleichschenklichtes Dreieck ABC auf der BC, dessen Spitze A nicht auf der DF liege: so wird die DF eine seiner Seiten schneiden; sie schneide die AB: so ist die AB >AC (a): aber auch =AC (Vorauss.): welches unmöglich ist. Folglich ist es unmöglich, dafs eines gleichschenklichten Dreiecks auf der BC Spitze aufserhalb der DF liege: mithin liegt jedes solchen Dreiecks Spitze auf der DF.

Dieſs wird auch so ausgedrückt: die eine gerade Linie BC senkrecht halbirende DF sey der Ort (Locus) der Spitzen aller auf der ersten BC beschriebenen gleichschenklichten Dreiecke.

3. (*Fig.* 87.) „Die zwei Schenkel AB, AC eines ungleichschenklichten Dreiecks ABC sind von einer aus der Spitze A an die Grundlinie BC gezogenen und diese halbirenden geraden Linie AD mehr als das Doppelte." — Denn nach der nämlichen Construction wie in §. 190., ist die AC der BE gleich; also die BA, AC zusammen der AB, BE gleich; diese aber sind (I, 20.) >AE d. i. die doppelte AD; folglich sind auch BA, AC zusammen > die doppelte AD.

4. (*Fig.* 97.) „Die zwei Schenkel AB, AC eines ungleichschenklichten Dreiecks ABC sind zusammen gröfser als das Doppelte der den Winkel an der Spitze halbirenden bis an die Grundlinie BC gezogenen geraden Linie AD." — Da nach §. 195, b. die CD >DB, wenn die AC>AB: so schneide man die DF=DB ab, und vollende die Figur wie in §. 191, a., und ziehe noch die AF; welche <AC seyn wird (§. 202.): die FE ist aber =AB. Nun sind die AF, FE zusammen >AE (I, 20.): folglich AC, AB zusammen noch vielmehr >AE d. i. die doppelte AD.

Die zwei letztern Sätze (3. und 4.) sind zwei Theilen der Prop. XXX. in Menelai Sphaericis, Lib. I. die sphärischen Dreiecke betreffend, analog; gemäfs Halleys Bemerkungen am Ende des I. Buchs: dafs es mehreren der dortigen Sätze correspondirende Sätze, geradlinigte Dreiecke betreffend, gebe.

§. 218. a, „In jeder geradlinigten Figur sind alle Seiten zusammen aufser einer gröfser als diese übrige Seite."

Beweis. 1) Vom Dreieck gilt dies nach Satz XX.

2) (*Fig.* 120, a. b. c. Es sey irgend eine vierseitige Figur ABCD; sie mag nun lauter auswärts gehende Winkel haben, oder auch einen einwärtsgehenden; und die AB eine Seite derselben, diese mag im letztern Fall an zwei auswärtsgehenden, oder in ihrem einen Endpunkt an einem einwärtsgehenden liegen: so werden die Seiten AD, DC, CB zusammen gröfser als die AB seyn.

Denn man ziehe die AC. So sind im Dreieck ADC die zwei Seiten AD, DC zusammen >AC (nr. 1.); also, wenn man die CB hinzunimmt, die drei AD, DC, CB zusammen >AC, CB. Aber die AC, CB sind >AB (nr. 1.): also noch viel mehr die AD, DC, CB zusammen >AB.

3) (*Fig.* 121.) Es sey irgend eine fünfseitige Figur ABCDE, und AB irgend eine Seite desselben: so werden die Seiten AE, ED, DC, CB zusammen gröfser als die AB seyn.

Man ziehe die AC. So sind (nach nr. 2.) im Viereck AEDC die AE, ED, DC gröfser als die AC; daher die AE, ED, DC, CB gröfser als die AC, CB. Aber die AC, CB sind >AB (nr. 1.). Folglich noch viel mehr die AE, ED, DC, CB zusammen >AB. — Und dieser Beweis gilt, es mag die fünfseitige Figur lauter auswärts gehende Winkel, oder auch einen oder zwei einwärts gehende haben: und im letztern Fall die AB in Beziehung auf die verschiedenartigen Winkel liegen wie sie will.

Und ebenso wird der Satz von einer sechsseitigen Figur bewiesen, indem man von einem der Endpunkte der AB die Diagonale zieht, welche das Sechseck in ein Dreieck auf der AB und in ein Fünfeck theilt. Des letztern vier übrige Seiten sind nämlich (nach nr. 3.) zusammen gröfser als diejenige Seite, welche die besagte Diagonale ist, und das Uebrige folgt mittelst Ax. 4. und nr. 1.

Und nachdem der Satz von der sechsseitigen Figur bewiesen worden, wird er ebenso von der siebenseitigen bewiesen; und so immerfort; indem bei dem Schlufs von der Figur von irgend einer Anzahl Seiten auf die Figur von der nächst höheren Anzahl Seiten immer derselbe gleichförmige Gang ist. Der Satz gilt also allgemein.

b. (*Fig.* 122.) Die von einem Punkt A an einen andern B gezogene gerade Linie ist kürzer als jede in

einerlei Ebene mit ihr zwischen diesen Punkten liegende gebrochene (das ist, aus mehreren unter irgend welchen Winkeln mit einander zusammentreffenden geraden bestehende) Linie. — Denn die gebrochene Linie besteht aus den übrigen Seiten einer geradlinigten Figur, von welcher die gerade AB eine Seite ist.

c. (*Fig.* 132.) In einer geradlinigten Figur ist jede Seite AB, und namentlich auch die gröfste, kleiner als die halbe Summe der Seiten (oder der halbe Perimeter) der Figur. — Denn man verlängere die AB nach Z, und schneide auf ihrer Verlängerung gerade Linien nach einander ab, welche den übrigen Seiten der Figur nach einander gleich seyen; und es sey Z der Endpunkt der letzten abgeschnittenen. So ist die BZ der Summe der übrigen Seiten gleich, und gröfser als die AB (nach a); die AZ aber ist der Summe aller Seiten oder dem Perimeter der Figur gleich. Da demnach die AZ in B ungleich getheilt, und AB der kleinere Theil ist: so ist die AB kleiner als die halbe AZ (§. 116. od. Anm. zu Ax. 7. oben S. 42.): d. i. kleiner als die halbe Summe aller Seiten oder der halbe Perimeter.

Satz XXI.

§. 219. Fafst man diesen Satz etwas allgemeiner so (vgl. Thom. Simpson Geom. p. 24.):

„Wenn von zwei auf einerlei Grundlinie stehenden Dreiecken das eine das andere einschliefst, es mag nun die Spitze des eingeschlossenen auf eine der Seiten oder innerhalb des einschliefsenden fallen: so ist des eingeschlossenen Summe der Seiten kleiner, der Winkel an der Spitze aber gröfser als des einschliefsenden:

so folgt des ersten Falls erster Theil mittelst Ax. 4. aus I, 20.; der zweite Theil unmittelbar aus I, 16.: der zweite Fall aber durch zweimalige Anwendung des ersten.

Es sey nämlich (Fig. zu I, 21. in d. Uebers.)

Fall I. Das Dreieck BEC vom Dreieck BAC eingeschlossen, und seine Spitze E falle auf die Seite AC des einschliefsenden: so ist,

1) da $BA+AE>BE$ (I, 20.), auch $BA+AC>BE+EC$ (Ax. 4.)

2) Winkel BEC als Aufsenwinkel $>BAC$ (I, 16.)

Fall II. Es sey das Dreieck BDC vom Dreieck BAC eingeschlossen, und seine Spitze D falle innerhalb des einschliefsenden: so verlängere man eine seiner Seiten

BD, und es wird die Verlängerung auf die AC treffen (Axiome, Anhang. 4)): es geschehe in E. So ist:

1) nach dem bewiesenen BA+AC>BE+EC;

und wiederum, weil das Dreieck BDC innerhalb des Dreiecks BEC eingeschlossen ist, und seine Spitze D auf die Seite DE des einschliefsenden fallt, nach Fall I.

BE+EC>BD+DC;

folglich noch viel mehr BA+AC>BD+DC.

2) Winkel BDC>BEC (nach Fall I. oder I, 16.); und Winkel BEC>BAC (nach dem bewiesenen); folglich noch viel mehr Winkel BDC>BAC.

§. 220. (*Fig.* 124.) Anderer Beweis des 1. Thls. des S. XXI.: Man ziehe durch D eine gerade Linie, welche die Seiten AB, AC in E, F treffe. Da nun AE+AF >EF (I, 20.); so ist BA+AC>BE+EF+FC. (Ax. 4.)

Aber da BE+ED >BD

und DF+FC>DC (I, 20.):

so ist BE+EF+FC>BD+DC.

Folglich noch viel mehr BA+AC>BD+DD. — So Lacroix in seiner Geom. §. 15.

Hiebei ist aber zu bemerken: Wenn verlangt wird, durch D eine gerade Linie zu ziehen, welche die Seiten AB, AC treffe: so läfst sich dieses zwar leicht vermittelst des Lineals bewerkstelligen; aber es beruht nicht unmittelbar auf den Postulaten. Nimmt man den Punkt E nach Belieben, und zieht ED und verlängert sie: so kann geschehen, dafs diese verlängert mit der DC zusammen, oder dafs sie innerhalb des Dreiecks BDC fällt, und der BC begegnet, nicht aber der AC. Um also den Punkt E so zu nehmen, dafs die ED verlängert nothwendig die AC treffe: müfste man die CD verlängern nach G, wo sie die AB treffe; und alsdenn den Punkt E zwischen A und G nehmen: welches eine weitläufigere Construction als die Euklidische, als Vorbereitung zu einem jedoch nicht einfacheren Beweise wäre.

§. 221. (*Fig.* 125, a.) Anderer Beweis des zweiten Theils. Man ziehe die AD, und verlängere sie nach E: so ist (I, 16.) Winkel BDE>BAD, und Winkel CDE >CAD: daher der ganze BDC> der ganze BAC. — So Michelsen in Fortsetzung des Versuchs in socrat. Gesprächen über die wicht. Gegenst. d. eb. Geom. 1782. 15tes Gespr. S. 66.

§. 222. Ausdruck des Satzes nach dem griechischen Texte: „Wenn auf einer der Seiten eines Dreiecks aus

ihren Endpunkten zwei gerade Linien inwendig zusammen gestellt werden: so werden die zusammengestellten kleiner als die zwei übrigen Seiten des Dreiecks seyn, aber einen gröfsern Winkel einschliefsen."

Anders: „Wenn auf einerlei Grundlinie zwei Dreiecke stehen, von welchen die Spitze des einen innerhalb des andern fällt: so sind die zwei Seiten des ersten zusammen kleiner als die zwei Seiten des andern, schliefsen aber einen gröfsern Winkel ein."

„Wenn von einem Punkt innerhalb eines Dreiecks an die Endpunkte seiner Grundlinie zwei gerade Linien gezogen werden: so sind diese zusammen kleiner als die zwei Seiten des Dreiecks, schliefsen aber einen gröfsern Winkel ein."

(*Fig.* 125, a.) „Wenn auf einer geraden Linie (BC) zwischen ihren Endpunkten eine andere gerade Linie (EA) aufgestellt ist, und aus zwei Punkten (A, D) der lezteren je zwei gerade Linien an die beiden Endpunkte (B, C) der ersten gezogen werden: so sind die von dem der Grundlinie nähern Punkt (D) aus gezogenen zusammen kleiner als die vom entferntern (A) gezogenen; schliefsen aber einen gröfsern Winkel mit einander ein." — In Verbindung mit I, 20.: „Wenn zwei Punkte B, C an verschiedenen Seiten einer geraden Linie AE liegen: so ist von den aus einerlei Punkte der letztern an die ersten zwei Punkte gezogenen geraden Linien die Summe derjenigen EA, EB, die in Einer geraden Linie liegen, die kleinste; von den übrigen an einerlei Seite dieser geraden Linie BC gezogenen aber die Summe je zweier von einem dem ersten Punkte E näheren Punkte D gezogenen DB, DC kleiner als zweier von einem entferntern Punkte A gezogenen AB, AC."

„Wenn von einem aufserhalb eines Dreiecks (DBC) und an der nämlichen Seite der Grundlinie (BC) angenommenen Punkte A zwei gerade Linien (AB, AC) an die Endpunkte (B, C) der Grundlinie gezogen werden, von welchen keine eine Seite des Dreiecks schneidet: so sind sie zusammen gröfser als die Seiten (BD, DC) des Dreiecks, schliefsen aber einen kleinern Winkel ein."

„Wenn zweier Winkel Spitzen (A, D) an einerlei Seite einer geraden Linie (BC) liegen, und des zweiten Spitze (D) innerhalb des ersten Winkels; die Schenkel beider aber, zwei und zwei, in den nämlichen zwei Punkten (B, C) der genannten geraden Linie zusammentreffen; so ist der zweite Winkel gröfser als der erste;

die von den gedachten Punkten begränzten Schenkel aber zusammen sind beim ersten gröfser als beim zweiten."

„Von einem Punkt (B) zu einem andern (C) ist der Umweg über einen aufserhalb des geraden Wegs angenommenen Punkt (A) gröfser als der Umweg über einen andern solchen Punkt, wenn der erstere Umweg den zweiten (zwischen sich und dem geraden Weg) einschliefst; vorausgesetzt, dafs die beiden Theile jedes dieser Umwege in geraden Linien gemacht werden. Hingegen ist die Ablenkung von einer geradlinigten Fortsetzung des Wegs bei den zwei Theilen (BD, DC) des letztern Umwegs kleiner als bei den zwei Theilen des ersteren (BA, AC)."

§. 223. Folgerungen. 1. Aus diesem Satze läfst sich eine nähere Bestimmung beim zweiten Falle des Satzes 7. folgern; wo gezeigt worden ist, dafs nicht die inwendig zusammengestellten (*Fig.* 48.) AD, BD den äufsern AC, BC, je eine einer, gleich seyn könne. Da nach dem gegenwärtigen Satz XXI. die AD, DB zusammen kleiner als die AC, CB sind: so folgt, dafs, wenn die AD der AC gleich ist, die BD kleiner als die BC sey.

2. a. (*Fig.* 35, a.) Wenn zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DBC auf einer Grundlinie BC stehen, deren eines das andere einschliefst: so ist jeder Schenkel AB, AC des einschliefsenden gröfser als ein Schenkel BD, DC des eingeschlossenen. — Denn da die BA, AC einander gleich sind: so sind sie zusammen das Doppelte der AB. Ebenso sind die BD, DC zusammen das Doppelte der BD. Nun sind die BD, DC zusammen gröfser als die BA, AC zusammen. Folglich die doppelte AB gröfser als die doppelte DB; daher auch die AB gröfser als die DB.

b. „Wenn auf der Grundlinie BC eines gleichschenklichten Dreiecks und an einerlei Seite mit demselben ein anderes gleichschenklichtes Dreieck errichtet wird, dessen ein Schenkel gröfser als ein Schenkel des ersten ist: so fällt desselben Spitze aufserhalb des ersten Dreiecks (oder es schliefst das erste ein). Wenn aber ein Schenkel desselben kleiner als ein Schenkel des ersten ist: so fällt desselben Spitze innerhalb des ersten Dreiecks (oder es wird von dem ersten eingeschlossen)." — Denn es sey das erste Dreieck ABC; und einer der Schenkel des andern sey gröfser als AB: so wird dieses andere aufserhalb des erstern fallen: denn gesetzt,

es fiele innerhalb, wie das Dreieck DBC: so ist dessen Schenkel DA (nach a) kleiner als AB; aber auch gröſser; welches unmöglich ist; folglich kann es nicht innerhalb des ersten fallen. Es kann aber auch das erste nicht schneiden (§. 63.). Folglich muſs es auſserhalb desselben fallen. Und ebenso wird der zweite Theil bewiesen. — Diesen Satz gebraucht Rob. Simson implicite bei dem Beweis, den er von XI, 23. nach Campanus gibt.

Anm. Aber es ist nicht im Allgemeinen, wie Coët, aus meinte, jede einzelne Seite eines eingeschlossenen Dreiecks kleiner als die im nämlichen Endpunkte der Grundlinie sich endigende des einschlieſsenden. — (Eig. zu I, 21. in d. Uebers.) Denn man nehme irgend ein Dreieck ABD, dessen Seite BD > BA sey; und man verlängere BD beliebig nach E; ziehe die AE, verlängere sie beliebig nach C, und ziehe BC. So ist des eingeschlossenen Dreiecks DBC Seite BD nicht kleiner als die Seite BA des einschlieſsenden ABC; sondern gröſser.

3. (*Fig.* 125, b.) „Wenn an verschiedene Punkte einer geraden Linie CD aus zwei an einerlei Seite von ihr befindlichen Punkten A, B je zwei gerade Linien gezogen werden; und unter denselben zwei an einen gewissen Punkt E der ersten gezogene AE, EB gleiche Winkel AEC, BED mit der ersten machen: so ist deren Summe kleiner als die Summe je zweier an einen andern Punkt der ersten gezogenen: von den übrigen an Punkte F, G, welche an einerlei Seite des ersten Punkts E liegen, gezogenen aber ist die Summe zweier an den dem ersten näheren Punkt F gezogenen AF, FB kleiner als die Summe der an den entfernteren Punkt G gezogenen AG, GB."

Denn man verlängere AE, und nehme EH=EB; ziehe die HB, welche die CD in J schneide; ziehe FH und GH. Da nun die BE, EJ den HE, EJ gleich, und Winkel BEJ (=AEC, Voraus.) =HEJ (I, 15.): so ist (I, 4.) BJ=JH, und die Winkel bei J gleich, also rechte. Daher auch FB=FH, und GB=GH (I, 4.). Nun ist aber (I, 20.) die Summe AF, FH > AH, d. i. die Summe AF, FB > Summe AE, EB; und (I, 21.) die Summe AG, GH > Summe AB, FH; d. i. Summe AG, GB > Summe AF, FB; w. z. e. w. — (L'Huilier de relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum — — Varsaviae 1782. — §. 26.)

§. 224. (*Fig.* 126. a.) Betrachtet man die vierseitige Figur ABDC in der Figur dieses Satzes abgesondert für sich: so unterscheidet sich ihr Winkel bei D von ihren übrigen Winkeln bei A, B und C, so wie von dem Winkel bei D eines andern Vierecks (*Fig.* 126. b.), dessen Spitze D an der andern Seite der durch B, C gezogenen geraden Linie, als der Punkt A liegt, dadurch, daſs diese letztern Winkel alle, innere Winkel der Figur sind, jener aber auſserhalb der Figur fällt; und wenn man von einem innerhalb der Figur liegenden Winkel bei D sprechen will, dieser gröſser ist als zwei rechte (I, 13, §. 143, c.); dagegen jene andern inneren alle kleiner als zwei rechte sind; ferner daſs der beiden Seiten BD, CD Verlängerungen über D hinaus innerhalb der Figur, bei den andern Winkeln aber die Verlängerungen der Seiten über die Spitzen der Winkel hinaus auſserhalb der Figur fallen; endlich, daſs bei diesen andern Winkeln die durch die Endpunkte der sie einschlieſsenden Seiten gezogenen Diagonalen innerhalb der Figur fallen, bei dem Winkel D aber die Diagonale BC auſserhalb der Figur fällt. Man heiſst diesen Winkel bei D (*Fig.* 126, a.) einen einwärtsgehenden, die andern auswärtsgehende.

Hienach hat man vermöge dessen, was in S. XXI. bewiesen wird, den Satz: „In einem Viereck mit einem einwärtsgehenden Winkel ist die Summe der zwei Seiten um diesen Winkel kleiner als die Summe der zwei andern Seiten des Vierecks."

Daher: „In einem gleichseitigen Viereck kann kein Winkel einwärtsgehend seyn."

§. 225. Verallgemeinerung des Satzes XXI.

Satz A. „Wenn innerhalb irgend einer geradlinigten Figur, die lauter ausspringende Winkel hat, und auf der nämlichen Grundlinie ein Dreieck beschrieben ist; so ist die Summe der Seiten der äuſsern Figur gröſser als die Summe der Seiten des Dreiecks."

I. Ist die äuſsere Figur ebenfalls ein Dreieck: so ist der Satz einerlei mit I, 20.

II. (*Fig.* 127.) Es sey innerhalb der vierseitigen Figur ADEB, die lauter ausspringende Winkel hat, und auf der nämlichen Grundlinie AB das Dreieck ACB beschrieben: so wird die Summe der Seiten AD, DE, EB des Vierecks gröſser seyn als die Summe der Seiten AC, CB des Dreiecks.

Man verlängere die AC über C: so wird dieselbe dem Perimeter der Figur ADEB begegnen (Axiome. 8te Klasse nr. 20. oder Anhang 3)), und da sie weder der Seite AD, noch der Seite AB begegnen kann: so wird sie entweder der DE zwischen D, E begegnen, wie in Z; oder auf den Punkt E treffen; oder der EB zwischen E, B begegnen, wie in Z.

Im ersten Fall theilt die verlängerte AC die Figur ADEB in das Dreieck ADZ, und in das Viereck AZEB, von welchem der Theil CZEB, ebenfalls ein Viereck, auf der Grundlinie CB steht. Da nun im ersten dieser Theile, dem Dreieck ADZ, die Summe der Seiten AD, DZ gröfser ist als AZ (§. 218. oder I, 20.): so ist, wenn man ZE, EB hinzunimmt, die Summe der Seiten AD, DE, EB gröfser als AZ, ZE, EB. Und da im letztern der genannten Theile, dem Viereck CZEB, die Summe der Seiten CZ, ZE, EB gröfser ist als CB (§. 218.): so ist, wenn man AC hinzunimmt, die Summe AZ, ZE, EB gröfser als AC, CB. Mithin ist noch viel mehr die Summe AD, DE, EB gröfser als AC, CB.

Im andern Fall theilt die verlängerte AC die Figur ADEB in zwei Dreiecke ADE, AEB; von deren letzterem ein Theil, das Dreieck CEB, auf der Grundlinie CB steht. Da nun im ersteren Dreieck die Summe AD, DE > AE ist (§. 218. oder I, 20.): so ist, wenn man EB hinzunimmt, die Summe AD, DE, EB > AE, EB. Und da im letzteren, dem Dreieck CEB, die Summe CE, EB > CB (§. 218. oder I, 20.): so ist, wenn man AC hinzunimmt, die Summe AE, EB > AC, CB. Mithin ist noch viel mehr die Summe AD, DE, EB > AC, CB.

Im dritten Fall theilt die verlängerte AC die Figur ADEB in das Viereck ADEY, und in das Dreieck AYB, dessen ein Theil, das Dreieck CYB, auf der Grundlinie CB steht. Da nun im Viereck ADEY die Summe der Seiten AD, DE, EY gröfser als AY ist (§. 218.): so ist, wenn man YB hinzunimmt, die Summe AD, DE, EB > AY, YB. Und da im Dreieck CYB die Summe CY, YB > CB ist (§. 218. oder I, 20.): so ist, wenn man AC hinzunimmt, die Summe AY, YB > AC, CB. Folglich ist noch vielmehr die Summe AD, DE, EB gröfser als AC, CB.

III. (*Fig.* 128.) Es sey innerhalb einer fünfseitigen Figur ADEFB, die lauter ausspringende Winkel hat, und auf der nämlichen Grundlinie ein Dreieck ACB beschrieben. So wird die Summe der Seiten AD, DE,

EF, FB gröfser als die Summe der Seite AC, CB seyn.

Man verlängere die AC: so wird, wenn diese der zweiten Seite (DE) von der Grundlinie AB und ihrem Endpunkt A an gerechnet, begegnet, die Figur in ein Dreieck und in ein Fünfeck; wenn sie auf den zweiten Winkelpunkt (E) von A an trifft, in ein Dreieck und Viereck; wenn sie der dritten Seite (EF) begegnet, in ein Viereck und Viereck; wenn sie auf den dritten Winkelpunkt (F) trifft, in ein Viereck und Dreieck; wenn sie endlich auf die vierte Seite (FB) trifft, in ein Fünfeck und Dreieck getheilt. Und in der ersteren dieser Theilfiguren ist, wenn man die verlängerte AC als Grundlinie nimmt, die Summe der Seiten gröfser als diese Grundlinie (§. 218.): daher folgt, wenn man hinzunimmt, was von den Seiten der anfänglichen Figur noch übrig ist; dafs die Summe der Seiten der anfänglichen Figur gröfser ist als die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur, welche ebenfalls, wie die anfängliche Figur, auf der Grundlinie AB steht. Von dieser zweiten Theilfigur nehme man denjenigen Theil, welcher auf der Grundlinie CB steht, und das Dreieck ACB zum Rest läfst: so ist in jenem Theil die Summe der Seiten gröfser als die Grundlinie CB (§. 218.); und wenn man die AC als gemeinschaftlich hinzunimmt; so erhält man die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur auf der Grundlinie AB gröfser als die AC, CB. Es war aber gezeigt worden, dafs die Summe der Seiten der anfänglichen Figur gröfser sey als die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur auf der Grundlinie AB. Folglich ist noch viel mehr die Summe der Seiten der anfänglichen Figur gröfser als die AC, CB.

Und auf ähnliche Art wird der Beweis für eine sechs- oder mehrseitige Figur mit lauter ausspringenden Winkeln geführt: und er gründet sich einzig auf den Satz §. 218., welcher zweimal angewandt wird, mit Ax. 4.

Satz B. Wenn innerhalb irgend einer geradlinigten Figur, die lauter ausspringende Winkel hat, und auf einerlei Grundlinie mit ihr ein Viereck, ebenfalls mit bloſs ausspringenden Winkeln, beschrieben ist: so ist die Summe der Seiten der äufsern Figur gröfser als die Summe der Seiten des Vierecks.

I. (*Fig.* 129.) Es sey innerhalb des Dreiecks AEB und auf der nämlichen Grundlinie AB das Viereck ACDB

beschrieben, das blofs ausspringende Winkel habe: so wird die Summe der Seiten AE, EB des Dreiecks gröfser seyn als die Summe der Seiten AC, CD, DB des Vierecks.

Denn man verlängere die AC, welche der BE begegnen wird; es geschehe in Z: und ziehe die Diagonale BC. So theilt die AZ das Dreieck AEB in zwei Dreiecke AEZ und AZB. Im ersteren sind nun die Seiten AE, EZ gröfser als AZ (§. 218. oder I, 20.); mithin die Summe AE, EB gröfser als AZ, ZB. Im andern betrachte man den auf der Diagonale BC stehenden Theil: und man hat auf einerlei Grundlinie BC die Dreiecke CZB, CDB; letzteres innerhalb des ersteren: mithin ist (nach Satz A, I. oder nach Elem. I, 21.) die Summe CZ, ZB gröfser als CD, DB. Daher auch, wenn man AC hinzunimmt, die Summe AZ, ZB gröfser als die AC, CD, DB. Nun war aber gezeigt: die Summe AE, EB gröfser als die AZ, ZB. Folglich ist noch viel mehr die Summe AE, EB gröfser als die AC, CD, DB.

II. (*Fig.* 130.) Es sey innerhalb des Vierecks AEFB, das blofs ausspringende Winkel habe, und auf derselben Grundlinie AB ein anderes Viereck, ebenfalls blofs mit ausspringenden Winkeln, beschrieben: so wird die Summe der Seiten des äufsern AE, FF, FB gröfser seyn als die des innern AC, CD, DB.

Man verlängere die AC, und ihre Verlängerung treffe erstlich auf die EF in Z: so theilt sie das Viereck in zwei Theile. Der erste ist das Dreieck AEZ, in welchem die Summe AE, EZ > AZ (§. 218. oder I, 20.); daher auch die Summe AE, EF, FB > die AZ, ZF, FB. Im andern Theile ziehe man die Diagonale BC: so steht auf dieser das Viereck CZFB, und innerhalb desselben auf der nämlichen Grundlinie des Dreieck CDEB; und es ist in diesen (Satz A, II.) die Summe CZ, ZF, FB gröfser als die CD, DB; daher auch, wenn man AC hinzunimmt, die Summe AZ, ZF, FB gröfser als die AC, CD, DB. Folglich ist noch vielmehr die Summe AE, EF, FB gröfser als die AC, CD, DB.

Die verlängerte AC treffe nun auf den Punkt F: und man hat das Dreieck AEF auf der Grundlinie AF; und die Dreiecke CFB, CDB auf der Grundlinie CB. Und wenn man auf jenes §. 218. oder I, 20., auf diese den Satz A, I. dieses §. (oder I, 21.) anwendet: so hat man

Summe AE, EF > AF; daher Summe AE, EF, FB > AF, FB;
und Summe CF, FB > CD, DB; daher Summe AF, FB > AC, CD, DB:
woraus noch viel mehr Summe AE, EF, FB > Summe AC, CD, DB.

Endlich treffe die verlängerte AC auf die FB in Y. So ist im Viereck AEFY

Summe AE, EF, FY > AY (§. 218.): daher Summe AE, EF, FB > AY, YB:
und in den Dreiecken BYC, BDC
Summe CY, YB > CD, DB; daher Summe AY, YB > AC, CD, DB;
daher noch viel mehr Summe AE, EF, FB > AC, CD, DB.

III. (*Fig.* 131.) Es sey innerhalb des Fünfecks AEFGB mit blofs ausspringenden Winkeln und auf derselben Grundlinie AB ein Viereck ACDB beschrieben: so ist die Summe der Seiten des Fünfecks AE, EF, FG, GB gröfser als die des Vierecks AC, CD, DB.

Man verlängere die AC: so wird diese, wenn sie der EF begegnet, das Fünfeck in ein Dreieck und Fünfeck; wenn sie auf F trifft, in ein Dreieck und Viereck; wenn sie auf die FG trifft, in ein Viereck und Viereck; wenn sie auf G trifft, in ein Viereck und Dreieck; wenn sie auf die GB trifft, in ein Fünfeck und Dreieck theilen. Und in den ersten dieser Theilfiguren ist, wenn man die verlängerte AC als Grundlinie annimmt, die Summe der Seiten gröfser als diese Grundlinie (§. 218.): woraus folgt, wenn man das, was von den Seiten der anfänglichen Figur noch übrig ist, hinzunimmt: dafs die Summe der Seiten der anfänglichen Figur gröfser ist als die Summen der Seiten der zweiten Theilfigur, welche ebenfalls auf der Grundlinie AB steht. Von dieser zweiten Theilfigur nehme man denjenigen Theil, der auf der Grundlinie CB steht, und das Dreieck ACB zum Rest läfst: man hat nun innerhalb dieses Theils und auf der nämlichen Grundlinie BC das Dreieck BDC; und (vermöge des Satzes A) ist die Summe der Seiten dieses Theils gröfser als die Seiten des Dreiecks CD, DB. Und wenn man die AC hinzunimmt: so erhält man die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur auf der Grundlinie AB gröfser als die Summe AC, CD, DB. Es war aber auch gezeigt, dafs die Summe der Seiten der anfänglichen Figur gröfser sey als die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur. Folglich ist noch viel mehr die

Summe der Seiten der anfänglichen Figur gröfser als die Summe der Seiten AC, CD, DB des Vierecks.

Und auf ähnliche Art wird bewiesen, dafs, wenn innerhalb einer sechs- oder mehrseitigen geradlinigten Figur und auf derselben Grundlinie ein Viereck beschrieben wird, die Summe der Seiten der äufsern Figur gröfser sey als die Summe der Seiten des Vierecks. Der Beweis beruht nämlich theils auf dem Satze §. 218., theils auf dem Satze A; und der Gang desselben ist gleichförmig wie im bisherigen.

Satz C. Wenn innerhalb irgend einer geradlinigten Figur, die blofs ausspringende Winkel hat, und auf derselben Grundlinie ein Fünfeck, das ebenfalls blofs ausspringende Winkel hat, beschrieben ist: so ist die Summe der Seiten der äufsern Figur gröfser als die Summe der Seiten des Fünfecks.

(*Fig.* 132.) Es sey das Fünfeck, das die Bedingung des Satzes habe, ACDEB, und

I. die äufsere Figur das Dreieck AFB. Man verlängere die Seite AC nach Z, und ziehe die BC. So ist im Dreiecke AFZ

die Summe AF, FZ > AZ (§. 218.); daher Summe AF, FB > AZ, ZB.

Ferner da innerhalb des Dreiecks CZB und auf derselben Grundlinie CB das Viereck CDEB mit blofs ausspringenden Winkeln steht: so ist nach Satz B. die Summe CZ, ZB > CD, DE, EB; daher Summe AZ, ZB > AC, CD, DE, EB. Folglich ist noch viel mehr die Summe AF, FB > Summe AC, CD, DE, EB.

II. (*Fig.* 133.) Die äufsere Figur sey ein Viereck AFGB oder irgend eine andere geradlinigte Figur mit blofs ausspringenden Winkeln. Und man verlängere des Fünfecks ACDEB in A sich endigende Seite AC, bis sie dem Perimeter der äufsern Figur begegnet: so theilt sie dieses in zwei Theile, in deren erstem die verlängerte AC, d. i. die AZ als Grundlinie betrachtet; die Summe der übrigen Seiten gröfser ist als AZ (§. 218.): Woraus folgt, dafs die Summe aller Seiten der äufsern Figur gröfser ist als die Summe aller Seiten der zweiten Theilfigur, deren Grundlinie AB, und die in A sich endigende Seite ebenfalls die AZ ist.

Und wenn man die BC zieht, und von der zweiten Theilfigur das Stück betrachtet, welches nach Hinwegnehmung des Dreiecks ACB übrig bleibt: so hat man auf der gemeinschaftlichen Grundlinie BC eine äufsere

Figur, deren erste Seite die CZ ist; und innerhalb desselben das Viereck CDEB; und beide haben blofs ausspringende Winkel. Nun ist vermöge des Satzes B.

die Summe der Seiten der äufsern Figur > Summe CD, DE, EB;

daher, wenn man die AC als gemeinschaftlich hinzunimmt;

die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur > Summe AC, CD, DE, EB.

Es war aber nach dem Bewiesenen die Summe aller Seiten der anfänglichen äufseren Figur gröfser als die Summe der Seiten der zweiten Theilfigur. Folglich ist noch viel mehr die Summe der Seiten der anfänglichen äufsern Figur gröfser als die Summe der Seiten AC, CD, DE, EB des innern Fünfecks.

Allgemeiner Satz. Wenn auf der nämlichen Grundlinie irgend zwei geradlinigte Figuren mit blofs ausspringenden Winkeln, die eine innerhalb der andern, beschrieben sind: so ist die Summe der Seiten der äufsern Figur gröfser als die Summe der Seiten der innern.

Dieses ist bewiesen, die äufsere Figur sey, welche man will, für den Fall, wenn die innere ein Dreieck ist, in Satz A; wenn sie ein Viereck ist, in Satz B; wenn sie ein Fünfeck ist, in Satz C; und zwar

für das innere Viereck mittelst §. 218. und des Satzes A für das innere Dreieck;

für das innere Fünfeck mittelst §. 218. und des Satzes B. für das innere Viereck;

und es wird der gleichförmige Gang des Beweises seyn

für das innere Sechseck mittelst §. 218. und des Satzes C für das innere Fünfeck;

und sodann für das innere Siebeneck mittelst §. 218. und des Satzes für das innere Sechseck;

und so weiter. Daher gilt der Satz allgemein.

Anmerkung. In Pfleiderers Anmerkungen zu I, 21. war dieser allgemeine Satz in folgende zwei Theile abgetheilt (s. Chrestom. geom. S. 314.):

a) „Wenn innerhalb eines Dreiecks auf seiner Grundlinie irgend eine geradlinigte Figur mit blofs ausspringenden Winkeln beschrieben ist: so ist die Summe der Seiten des Dreiecks gröfser als die Summe der Seiten der innern Figur."

b) „Wenn innerhalb einer mehr als dreiseitigen Figur auf ihrer Grundlinie irgend eine geradlinigte Figur

mit bloſs ausspringenden Winkeln beschrieben ist: so ist die Summe der Seiten der äuſsern gröſser als die Summe der Seiten der innern."

Wollte man aber beim Beweis den Gang befolgen, daſs man zuerst den Fall, da die äuſsere Figur ein Dreieck, und in dasselbe ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. beschrieben wären; sodann ebenso, wenn diese Figuren in ein Viereck, wenn sie in ein Fünfeck beschrieben wären u. s. w., nach einander vornähme: so würde man bei dieser Anordnung des bei der obigen statt gehabten Vortheils einer leichten und einfachen Reduction der nachfolgenden Fälle auf die vorhergehenden entbehren. Es ist dieses bei Gegenständen, die sich auf mehrerlei Arten ordnen und abtheilen lassen, zu bemerken, daſs öfters unter diesen verschiedenen Arten eine allein oder vorzugsweise vor den andern zu einer schicklichen Abhandlung der Materie angemessen ist.

Aus dem obigen allgemeinen Satze folgt:

„Gebrochene Linien mit bloſs ausspringenden Winkeln, die zwischen einerlei Endpunkten (in einerlei Ebene: was auch bei den obigen Sätzen zu verstehen ist) auf einerlei Seite der ihre Endpunkte verbindenden geraden Linien so liegen, daſs keine die andere schneidet, sind unter einander ungleich; nämlich jede von einer andern eingeschlossene ist kleiner als diese."

„Eben dieses gilt, wenn auch die eingeschlossene einen Theil ihres Zugs mit der sie einschlieſsenden gemeinschaftlich hat, oder diese in einem oder einigen Punkten trifft, ohne sie zu durchkreuzen." — Denn dieser Fall wird sich auf zwei- oder mehrmalige Anwendung des vorigen reduciren, wie sich leicht ersehen läſst.

Satz XXII.

§. 226. Die drei Bedingungen, welche die Determination angibt, reduciren sich manchmal in besondern Fällen auf zwei oder auf eine. Z. B. Wenn man von einer A der dreien A, B, C weiſs, daſs sie gröſser ist als jede der beiden andern: so ist nur noch erforderlich, daſs die zwei übrigen B, C zusammen gröſser als A seyen. Denn in jenem Fall ist von selbst die A mit jeder der beiden übrigen zusammengenommen gröſser als die übrige, da sie schon für sich allein gröſser ist.

Sind alle drei einander gleich; so sind von selbst je zwei zusammen gröſser als die dritte.

Sind zwei, A und B, einander gleich: so wird nur noch erfordert, dafs die dritte C kleiner sey als die Summe jener zwei, oder als das Doppelte einer von ihnen: denn die C mit jeder beiden andern A, B ist in diesem Fall von selbst gröfser als die übrige. Sind also zwei, A und B, gleich, und in einem besondern Fall jede gröfser als die dritte C: so sind damit alle Bedingungen erfüllt.

Sind zwei A und B einander ungleich: so wird erfordert, dafs die dritte C kleiner als ihre Summe, aber gröfser als ihr Unterschied sey. Denn wenn dieses ist, und A die gröfsere der ungleichen: so ist, da sie allein schon gröfser ist als B, noch viel mehr A und C zusammen gröfser als B; ferner da die C gröfser ist als der Unterschied der gröfsern A von der kleinern B, so sind die C und B zusammen gröfser als A. Und da auch $C < A+B$, oder $A+B > C$ ist, so sind damit alle drei Bedingungen erfüllt.

§. 227. Analysis der Aufgabe. a) (Fig. zu I, 22. in d. Uebers.) Werden die DF, FG, GH den drei gegebenen A, B, C beziehungsweise gleich, in gerader Linie an einander gelegt: so reducirt sich die Aufgabe darauf: Auf der gegebenen FG ein Dreieck zu beschreiben, dessen in F sich endigende Seite der gegebenen DF, die in G sich endigende der gegebenen GH gleich sey.

b) Und die Determination ist: die DG mufs $>GH$; die FH mufs $>DF$; und die DF, GH zusammen müfsen $>FG$ seyn.

Besondere Fälle: 1) Ist die DF kleiner als die FG: so mufs die GH kleiner als die DG, aber gröfser als der Unterschied der beiden DF, FG seyn. Denn man schneide von der gröfsern FG die FJ=DF ab: so ist JG dieser Unterschied. (*Fig.* 134, a.) Ist nun die $GH > JG$, da die DF=FJ: so sind die DF, GH zusammen $>FG$. Es ist aber auch $FH > DF$, weil schon $FG > DF$ (Voraussetzung): und wenn nun auch die $DG > GH$ (oder $GH < DG$): so sind alle drei Bedingungen erfüllt.

2) Ist die DF=FG: so mufs noch die $DG > GH$ seyn.

3) Ist die $DF > FG$: so ist noch viel mehr die $DF + GH > FG$. Nun mufs aber noch die $FH > FD$, und die $DG > GH$ seyn.

c) (Fig. zu I, 22. in der Uebers.) Gesetzt, es sey FKG das zu beschreibende Dreieck, dessen Seite FK=DF, GK=GH sey: so mufs (wie bei I, 1. geschlossen worden) wegen der ersten Gleichheit der Punkt K in der

Peripherie eines Kreises liegen, der aus dem Mittelpunkt F mit der Weite FD beschrieben wird; und wegen der zweiten, mufs derselbe in der Peripherie eines Kreises liegen, der aus dem Mittelpunkt G mit der Weite GH beschrieben wird. Demnach mufs der Punkt K, d. i. die Spitze des auf der FG zu beschreibenden Dreiecks, auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der beiden genannten Kreise liegen.

§. 228. Der Grund der Determination liegt in I, 20. Weil in jedem Dreieck je zwei Seiten zusammen gröfser als die dritte sind: so müfsen, wenn ein Dreieck seine drei Seiten den drei gegebenen A, B, C stückweise gleich haben soll, auch dieses Dreiecks Seiten, und mithin die A, B, C selber so beschaffen seyn, dafs je zwei zusammen gröfser sind als die dritte: welches drei Bedingungen in sich schliefst.

Dafs, wenn diese drei Bedingungen nicht Statt haben, die zwei nach §. 227. zu beschreibende Kreise einander nicht schneiden können, läfst sich ohne Voraussetzung der Sätze III, 7. 8. nicht darthun.

§. 229. Hingegen läfst sich, dafs, wofern die drei Bedingungen Statt haben, die Kreise einander nothwendig schneiden werden, so erweisen:

a) Gesetzt die beiden Kreise schnitten einander nicht: so würden sie entweder ganz aufserhalb einander liegen, oder der erste würde den zweiten ganz in sich schliefsen, oder der zweite den ersten.

(*Fig.* 135, a.) Sie können aber nicht aufser einander liegen. Denn wäre dieses: so müfste auch des zweiten Kreises Mittelpunkt aufserhalb des ersten liegen, und der erste die FG zwischen F und G schneiden: er schneide sie in M; und dann wäre die GH, der Radius des zweiten Kreises, nicht gröfser als die GM. Die DF ist aber der FM gleich (Def. 15.); folglich wären die DF und GH zusammen nicht gröfser als die FG. Sie sind aber gröfser (Vorauss.): welches sich widerspricht. Folglich können die beiden Kreise nicht aufserhalb einander liegen.

(*Fig.* 135, b.) Auch kann der erste Kreis nicht den zweiten ganz in sich schliefsen. Denn wäre dieses: so wäre die FH nicht gröfser als DF, der Radius des ersten Kreises: sie ist aber gröfser (Vorauss.). Folglich kann der erste Kreis den zweiten nicht einschliefsen.

(*Fig.* 135, c.) Und ebenso wird bewiesen, dafs auch der zweite Kreis den ersten nicht einschliefsen könne.

Denn wäre dieses: so wäre die GD nicht gröfser als die GH, der Radius des zweiten Kreises. Sie ist aber gröfser (Vorauss.).

Da demnach weder die beiden Kreise aufserhalb einander liegen, noch der erste den zweiten, noch der zweite den ersten ganz einschliefsen kann: so müfsen sie zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb einander liegen, und also einander schneiden; w. z. e. w.

b) Dieses läfst sich auch vermittelst des Grundsatzes (Ax. zweite Klasse, nr. 20. oder Anhang, nr. 7.): dafs zwei Kreise einander schneiden, wenn die Peripherie des einen zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb des andern fällt, so erweisen:

(*Fig.* 134, a.) Der erste Kreis geht durch die DH entweder zwischen F und G durch, oder nicht. Er gehe erstlich nicht zwischen F und G durch: so wird er doch diesseits H durchgehen, weil sonst FD nicht $<$FH, d. i. A nicht $<$B$+$C wäre; also fällt die Peripherie des zweiten Kreises bei H aufserhalb des ersten. Sie wird aber auch zwischen C und D innerhalb des ersten fallen: denn wäre dieses nicht; so wäre nicht GH$<$GD, d. i. C$<$A$+$B. Da demnach die Peripherie des zweiten Kreises bei H aufserhalb, zwischen D und G aber innerhalb des ersten fällt: so schneidet er den ersten.

Zweitens gehe der erste Kreis zwischen F und G durch, wie in J: so wird der zweite gegen D hin innerhalb des ersten zwischen J und D durchgehen, nämlich diesseits D und jenseits J. Denn gienge er nicht diesseits D durch: so wäre die GH, sein Radius, nicht $<$GD, d. i. C nicht $<$A$+$B. Gienge er nicht jenseits J durch: so wäre die GH nicht $>$GJ; und da DF$=$FJ; so wäre nicht DF$+$GH$>$FG, d. i. A$+$C$>$B. Es fällt demnach des zweiten Kreises Peripherie zwischen D und J innerhalb des ersten, aber auch bei H aufserhalb des ersten, weil FH$>$FD. Folglich schneidet der zweite den ersten.

Man kann diesen letztern Beweis auch mit einer etwas andern Anordnung seiner Theile so vertragen:

Da die FH$>$FD: so geht der erste, nämlich der aus dem Mittelpunkt F mit der Weite FD beschriebene Kreis zwischen F und H durch. Und da GD$>$GH: so geht der zweite, nämlich der aus G mit GH beschriebene Kreis, zwischen G und D durch. Von diesen Durchgangspunkten wird aber der des zweiten Kreises näher bei D fallen als der des ersten. Dieses ist erst-

lich offenbar in dem Fall, wenn der erste Kreis durch G den Mittelpunkt des zweiten, oder zwischen G und H durchgeht, indem der Durchgangspunkt des zweiten näher als sein Mittelpunkt G, bei D liegt. In dem Fall aber, da der erste Kreis zwischen F und G durchgeht, wie in J, ist, da DF+GH>FG ist (Vorauss.), aber DF=FJ als Radii, die GH>GJ: folglich muſs auch in diesem Fall der zweite Kreis näher bei D durchgehen, als im Punkt J, wo der erste Kreis durchgeht. Mithin fällt in allen Fällen die Peripherie des zweiten Kreises bei ihrem Durchgangspunkt von G nach D hin innerhalb des ersten Kreises: sie fällt aber auch auſserhalb desselben bei H: folglich schneidet der zweite Kreis den ersten.

§. 230. Es schneide nun der zweite Kreis den ersten in K: so ist, wenn man KF, KG zieht, das Dreieck KFG das Verlangte; es ist nämlich auf der FG=B beschrieben; und es sind seine Seiten FK=FD=A, GK=GH=C.

Die beiden Kreise schneiden aber einander noch einmal auf der andern Seite der DH (Ax. a. a. O.) es geschehe in L: so thut, wenn man LF, LG zieht, auch das Dreieck LFG der Aufgabe Genüge, aus gleichen Gründen.

Hingegen schneiden die zwei Kreise einander nicht noch in einem dritten Punkt (§. 101.): und es gibt ausser den Dreiecken KFG, LFG kein anderes auf FG, weder an der einen noch andern Seite derselben, welches seine in F sich endigende Seite der FD oder A, die in G sich endigende der GH oder C gleich hätte, vermöge I, 7.

§. 231. Aus der Auflösung erhellt, daſs die Aufgabe mit der weitern Bestimmung vorgetragen werden kann, daſs eine der drei gegebenen selbst eine Seite des zu beschreibenden Dreiecks werde: nämlich: „Es seyen drei gerade Linien A, FG, C gegeben, von welchen je zwei zusammen gröſser seyen als die dritte: man soll ein Dreieck beschreiben, das die FG zu einer seiner Seiten, und die übrigen Seiten der A und C gleich habe." Oder „auf einer gegebenen Grundlinie FG ein Dreieck beschreiben, dessen zwei Seiten zweien gegebenen geraden Linien, je eine einer, gleich seyen." — So wird auch der Satz gleich in der folgenden Aufgabe I, 23. gebraucht.

Anderer Ausdruck: „Aus zwei gegebenen Punkten F, G zwei gerade Linien nach einem dritten Punkt hin zusammenstellen, welche zwei gegebenen geraden Linien A, C gleich seyen."

§. 232. Specielle Fälle der Aufgabe I, 22.:

a) „Ein Dreieck (auf einer gegebenen unbegränzten geraden Linie, und an einen auf ihr gegebenen Punkt als einen seiner Winkelpunkte) beschreiben, welches seine drei Seiten den dreien Seiten eines gegebenen Dreiecks, je eine einer, gleich habe." Wird in I, 23. gebraucht. — Die drei Seiten des gegebenen Dreiecks sind nämlich drei solche gerade Linien, bei welchen die in der Determination von I, 22. angegebenen Bedingungen Statt haben, vermöge I, 20.

Specieller: (*Fig.* 136.) „Auf der Grundlinie AB eines gegebenen Dreiecks ABC und an der andern Seite desselben ein Dreieck beschreiben, das seine in A, B sich endigende Seiten den Seiten AC, CB des gegebenen gleich habe." Wiederum „Auf der gegebenen Grundlinie AB eines Dreiecks ABC und an der andern Seite derselben ein Dreieck beschreiben, das seine in A sich endigende Seite der BC, und die in B sich endigende der AC gleich habe."

b) (*Fig.* 134, b.) „Auf der gegebenen Grundlinie FG ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen jeder Schenkel der gegebenen DF gleich sey."

Wenn die FD gröfser ist als die FG: so ist die Aufgabe immer möglich. Wenn sie kleiner ist: so mufs doch ihr Doppeltes gröfser als die FG seyn (§. 226.); also sie selbst mufs gröfser als die Hälfte der FG seyn.

c) „Ein gleichschenklichtes Dreieck mit einem gegebenen Schenkel FG beschreiben, dessen Grundlinie einer andern gegebenen FD gleich sey. Es mufs aber die FD kleiner als das Doppelte der FG seyn."

d) (*Fig.* 134, a.) „Auf der gegebenen Grundlinie FG, welche gröfser als jede der zwei gegebenen ungleichen DF, GH, aber kleiner als ihre Summe sey, ein Dreieck beschreiben, dessen Seiten den gegebenen DF, GH gleich seyen."

e) „Es seyen zwei ungleiche gerade Linien DF, FG gegeben, und eine dritte GH, welche kleiner als ihre Summe DG, aber gröfser als ihr Unterschied sey: auf der Seite FG ein Dreieck beschreiben, dessen zwei übrige Seiten der DF, GH gleich seyen."

§. 233. Anwendung auf andere Aufgaben:

1) Von Dreiecken:

a) „Ein Dreieck beschreiben, dessen zwei Seiten und die von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gezogene gerade Linie dreien gegebenen geraden Linien A, B, C der Ordnung nach gleich seyen." — Zur Analysis vgl. Fig. zu I, 16. — Determination: Nimmt man c das Doppelte von C: so müfsen von den dreien A, B, c, je zwei zusammen gröfser als die dritte seyn.

b) „Ein Dreieck beschreiben, dessen eine Seite, die Grundlinie und die von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gezogene gerade Linie dreien gegebenen A, B, C der Ordnung nach gleich seyen. Es müfsen aber, wenn man von B die Hälfte b nimmt, von den dreien A, b, C je zwei zusammen gröfser als die dritte seyn."

2) Von Vierecken:

a) „Aus vier geraden Linien oder Seiten, welche in der Ordnung, wie sie an einander liegen, vier gegebenen geraden Linien A, B, C, D gleich seyen, ein Viereck beschreiben, in welchem überdiefs zwei aneinander liegende Seiten, die zweien genannten der vier gegebenen gleich sind, um einen gegebenen geradlinigten Winkel W herum liegen." — Bestimmung.

b) „Es seyen drei gerade Linien A, B, C gegeben, von welchen immer zwei zusammen gröfser als die dritte: man soll ein Viereck beschreiben, in welchem zwei an einander liegende Seiten, jede der A; die zwei übrigen, jede der B; und die durch die zwei von den ersten und von den zweiten eingeschlossenen Winkel gehende Diagonale der C gleich seyen."

c) „Es seyen drei gerade Linien A, B, C gegeben: man soll ein Viereck beschreiben, in welchem zwei an einander liegende Seiten einander und der A, die zwei übrigen einander gleich seyen, die durch die von jenen und von diesen eingeschlossenen Winkel gehende Diagonale der B, die andere Diagonale der C gleich seyen." Es mufs aber die C kleiner seyn als die doppelte A.

d) „Es seyen zwei ungleiche gerade Linien A, B, und eine dritte C gegeben; ein Viereck beschreiben, dessen zwei an einander liegende Seiten der A, die zwei übrigen der B, und die durch die nicht von je zwei gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel gehende Diagonale der C gleich sey." Es mufs aber die C kleiner als das Doppelte der kleinern von den beiden A und B seyn.

Satz XXIII.

§. 234. Anderer Ausdruck der Aufgabe: „An eine der Lage nach gegebene gerade Linie aus einem auf ihr gebenen Punkt eine gerade Linie unter einem Winkel ziehen, der einem gegebenen Winkel gleich sey." *Προς θεσει δεδομενη ευθειᾳ και τῳ προς αυτῃ σημειῳ δεδομενῳ ευθειαν γραμμην αγειν, δεδομενην ποιησαν γωνιαν.* (Vgl. Euclid. Dat. Prop. XXIX.)

Bei gegebener Spitze und Lage des einen Schenkels die Lage des andern Schenkels eines Winkels finden, der einem gegebenen Winkel gleich werden soll.

Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen geraden Linie eine gerade Linie ziehen, welche mit der ersten einen Winkel einschliefse, der demjenigen gleich sey, den zwei andere der Lage nach gegebene gerade Linien mit einander einschliefsen.

§. 235. Da nach I, 8., wenn zwei Dreiecke die zwei Seiten den zweien Seiten, je eine einer, und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich haben, sie auch einen Winkel einem Winkel gleich haben, denjenigen nämlich, der von den gleichen Seiten eingeschlossen ist: so erhält man einen einem gegebenen gleichen Winkel, wenn man aus zweien von dessen Schenkeln beliebig abgeschnittenen Stücken und der ihre Endpunkte verbindenden Grundlinie, welche ein Dreieck einschliefsen, ein Dreieck mit zwei jenen gleichen Seiten und jener gleicher Grundlinie macht. Ein solches Dreieck läfst sich aber an eine gegebene gerade Linie und einen auf ihr gegebenen Punkt beschreiben (I, 22. §. 232, a.). Folglich läfst sich ein dem gegebenen gleicher Winkel an die gegebene gerade Linie und den auf ihr gegebenen Punkt anlegen.

§. 236. Die Construction wird einfacher, wenn man von den Schenkeln des gegebenen Winkels beliebige gleiche, als wenn man beliebige ungleiche Stücke abschneidet. So wird das Dreieck CDE gleichschenklicht (Fig. zu I, 25. in d. Uebers.), und man hat an die AB eines mit gleichen Schenkeln und gleicher Grundlinie, als jenes, zu legen. Diefs gibt die Construction: (*Fig.* 137.) Aus dem Mittelpunkt C mit einem beliebigen Radius beschreibe man innerhalb des Winkels C einen Kreisbogen DE, und aus dem Mittelpnnkt A mit dem gleichen Radius AF den Kreisbogen Ff: sodenn aus dem Mittelpunkt F mit einem der geraden Linie DE gleichen Radius einen Kreisbogen, der den Bogen Ff schneiden

wird, vermöge dessen, was bei I, 22. gezeigt, und in §. 232, a. bemerkt worden ist: er schneide ihn in G; und man ziehe die AG: so wird der Winkel BAG, dem C gleich seyn. Denn zieht man noch die gerade FG: so sind die Seiten DC, CE den Seiten FA, AG, und die Grundlinie DE der Grundlinie FG gleich: folglich ist (I, 8.) auch der Winkel C dem FAG gleich.

Auf diese Auflösung kommt diejenige hinaus, welche Proclus als von Apollonius gegeben anführt (s. Chrestom. geom. p. 267.): und nach der hier gegebenen Darstellung wenigens ist dieselbe nicht, was Proclus gegen sie einwendet, von Sätzen des dritten Buchs abhängig.

§. 237. Andere Arten, theils aber nur für besondere Fälle, theils zwar allgemein, aber durch weitläufigere Constructionen, an eine gegebene gerade Linie und Punkt auf ihr einen einem gegebenen gleichen Winkel anzulegen, sind in §§, 73, 3); 161; 168; 179, 4); 211. bemerkt worden.

§. 238. Besondere Fälle. a) „An einen Schenkel eines gegebenen Winkels und an dessen Spitze, an seiner andern Seite einen ihm gleichen Winkel anlegen." Auch „Einen gegebenen Winkel verdoppeln."

b) „An des einen Schenkels eines gegebenen Winkels Verlängerung über die Spitze hinaus, an derselben Spitze und an der nämlichen Seite einen ihm gleichen Winkel anlegen."

c) An eine gegebene gerade Linie einem an ihrem einen Endpunkt befindlichen Winkel, den sie mit einer andern geraden einschliefst, einen gleichen Winkel an dem andern Endpunkt anlegen; und zwar

α) an derselben Seite;

β) an der andern Seite derselben.

§. 239. Anwendung auf Aufgaben

1) von Dreiecken:

a. „An eine gegebene Seite ein Dreieck beschreiben, dessen andere Seite einer gegebenen geraden Linie, und der von den beiden Seiten eingeschlossene Winkel einem gegebenen Winkel gleich sey." Auf mittelst I, 23. 3. Post. 1.

Davon ein besonderer Fall: „An einen gegebenen Schenkel ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen Winkel an der Spitze einem gegebenen Winkel gleich sey."

b. „An eine gegebene Seite ein Dreieck beschreiben, das einen anliegenden Winkel einem gegebenen Winkel, und die diesem Winkel gegenüberliegende Seite einer gegebenen geraden Linie gleich habe." — Oder: „dessen andere Seite einer gegebenen geraden Linie, und der dieser gegenüberliegende Winkel einem gegebenen Winkel gleich sey." Bestimmung, u. Aufl. mittelst I, 23. u. §. 209, 2).

Besonderer Fall hievon: An einem gegebenen Schenkel ein gleichschenklichtes Dreieck beschreiben, dessen Winkel an der Grundlinie einem gegebenen gleich sey:" dieser letztere muſs aber spitzig seyn, vermöge §. 175, b.

c. „Auf einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck beschreiben, dessen ein anliegender Winkel einem gegebenen spitzen gleich, der gegenüberliegende Winkel aber ein rechter sey." Aufl. mittelst I, 23. 12. §. 176, b.

d. (*Fig.* 138.) „Auf einer gegebenen Grundlinie AB ein Dreieck beschreiben, das eine Seite einer gegebenen geraden M gleich, und den Winkel an der Spitze einem gegebenen schiefen Winkel W gleich habe." (Der Fall, da dieser Winkel ein rechter ist, ist in §. 210. II. Thl. behandelt worden.)

Fall 1. Der gegebene Winkel W sey stumpf: so muſs, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, die M kleiner als die AB seyn (§. 198, 3)).

Man schneide von der AB die AC=M ab, lege an sie den Winkel ACD=W, und beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AB einen Kreis, der die CD schneiden wird (Ax. Anh. 7.); er schneide sie in E. Man ziehe die AE, und schneide von ihr die AF=AC oder M ab, und ziehe BF. So ist das Dreieck AFB das verlangte. Beweis aus I, 4.

Fall 2; wenn der gegebene Winkel W spitzig ist, läfst sich durch ähnliche Construction auflösen. In diesem Fall kann die M gröfser, gleichgrofs oder kleiner als die AB seyn; aber wenn sie gröfser ist, und man von der verlängerten AB die AC=M abschneidet, und an sie den Winkel ACD=W anlegt: so darf die AB nicht kleiner seyn als das von A auf die CD gefällte Perpendikel.

Diese Aufg. d. wird nämlich mittelst I, 4. auf die Aufgabe b reducirt.

e. „An eine gegebene Seite ein Dreieck beschreiben, das den anliegenden Winkel an der Grundlinie einem

gegebenen gleich, und den zwischen dem andern Winkel und dem aus der Spitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikel liegenden Abschnitt der Grundlinie einer gegebenen geraden Linie gleich habe."

f. (*Fig.* 114.) „An eine gegebene Spitze A und auf einer gegebenen unbegränzten geraden Linie BC ein Dreieck beschreiben, in welchem die den Winkel an der Spitze halbirende bis an die Grundlinie fortgezogen einer gegebenen geraden Linie D gleich, und

aa) der Winkel an der Spitze einem gegebenen gleich sey;"

bb) oder einer der Abschnitte, in welche jene die Grundlinie theilt, einer gegebenen geraden E gleich sey;

cc) oder eine Seite einer gegebenen E gleich sey;

dd) oder der zwischen dem von der Spitze A auf die Grundlinie gefällten Perpendikel und dem einen Endpunkt der Grundlinie fallende Abschnitt derselben einer gegebenen E gleich sey."

Bestimmung: die D mufs aber kleiner als das Perpendikel seyn; wie auch die E in Fall cc).

2) Bei Vierecken:

a) „Auf einer gegebenen Grundlinie ein Viereck beschreiben, dessen drei Seiten dreien gegebenen geraden Linien, je eine einer, und der Winkel an dem einen Endpunkt der Grundlinie einem gegebenen Winkel gleich sey."

b) Ein Viereck beschreiben, das drei seiner Seiten dreien gegebenen geraden Linien, und die zwei von ihnen eingeschlossenen Winkel zweien gegebenen Winkeln gleich habe; u. a. m.

Satz XXIV.

S. 240. Wie nach I, 19. in einem Dreieck, welches zwei Winkel ungleich hat, dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüberliegt: so besagt Satz 24., dafs in zwei Dreiecken, welche einen Winkel einem Winkel ungleich haben, dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüberliege, wenn sie die diese Winkel einschliefsenden Seiten, je eine einer, gleich haben.

Wenn, während in einem Dreieck ein Winkel sich ändert, blofs eine der ihn einschliefsenden Seiten unverändert gesetzt wird, die andere aber nicht: so mufs nicht auch zugleich seine Gegenseite sich ändern, weder überhaupt, noch insbesondere in demselben Sinne, dafs

sie nämlich mit dem Winkel gröfser oder kleiner werde. (*Fig.* 139.) Denn es sey irgend ein Dreieck ABC, dessen Winkel A der Seite BC gegenüberliege; und man beschreibe einen Kreis aus dem Mittelpunkt B mit der Weite BC: so wird, wenn man auf dessen Peripherie, so weit sie an der nämlichen Seite von AB mit dem Dreieck ABC liegt, den Punkt C sich bewegend, und immer AC, BC gezogen gedenkt, der Winkel BAC gröfser oder kleiner werden, ohne dafs seine Gegenseite BC gröfser oder kleiner wird. Auch kann der Winkel BAC kleiner werden oder unverändert bleiben, während die Gegenseite BC gröfser wird; wie man leicht sieht, wenn man aus dem Mittelpunkt B mit einem Radius BD, der gröfser als BC ist, einen Kreis beschrieben denkt.

Wenn hingegen bei unveränderter Gröfse beider Seiten BA, AC, der Winkel BAC sich ändert: so sagt Satz 24. werde sich auch dessen Gegenseite oder die Grundlinie BC ändern; und zwar gröfser oder kleiner werden, je nachdem jener Winkel gröfser oder kleiner wird. Also wenn bei unveränderter Gröfse beider Schenkel AB, AC und unveränderter Lage des Schenkels AB der Schenkel AC sich um den Punkt A herum dreht: so wird, je nachdem der Schenkel AC dem AB sich nähert oder sich von ihm entfernt, auch der Punkt C dem Punkt B sich nähern oder sich von ihm entfernen, oder die BC sich verkürzen oder verlängern. Oder von zwei ungleichen Winkeln, welche die Schenkel, zwei und zwei, gleich haben, hat der gröfsere Winkel eine gröfsere Gegenseite (die ihn schliefst, aufspannt, ὑποτείνει, subtendit), als der kleinere Winkel.

§. 241. Dieser Satz ist Gegensatz des Satzes 4. in Beziehung auf dessen erste Folge: er spricht nämlich unter Beibehaltung der zwei ersten Bedingungen des Satzes 4. und Annahme einer der dritten entgegengesetzten Bedingung statt der dritten, eine der ersten Folge entgegengesetzte Folge aus. Wenn in zwei Dreiecken, welche zwei Seiten zweien Seiten, je eine einer, gleich haben, auch der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel im einen so grofs ist wie im andern: so ist auch die Grundlinie im einen so grofs wie im andern; dieſs sagt I, 4. Ist aber jener Winkel im einen Dreieck gröfser: so ist auch im nämlichen Dreieck die Grundlinie gröfser; sagt I, 24.

§. 242. Aus Satz 8. folgt: dafs in zwei Dreiecken, welche zwei und zwei Seiten gleich, und die Zwischen-

winkel ungleich haben, die Grundlinien nicht gleich seyn können: denn wären die Grundlinien gleich; so müfsten nach S. 8. auch die Zwischenwinkel gleich seyn; welche doch ungleich sind.

Schon nach dem, was in Satz 7. gezeigt worden ist, können (s. Fig. zu I, 7.) in zwei Dreiecken BAC, BAD, welche die Seite AB gemeinschaftlich, und die Seiten AC, AD gleich, die Winkel BAC, BAD aber ungleich haben, die übrigen Seiten BC, BD nicht gleich seyn. Die nähere Bestimmung, welche von ihnen die gröfsere sey, wird nun wiederum aus Satz 24. folgen.

§. 243. (*Fig.* 140, a.) Beweise, dafs, wenn in den Dreiecken ABC, DEF die Seiten BA, AC den Seiten ED, DF, je eine einer, gleich sind, der Winkel BAC aber gröfser ist als der Winkel EDF, auch die BC gröfser als die EF sey; mittelst Construction eines dem einen Dreieck durchaus gleichen Dreiecks an eine der, zwei und zwei gleichen, Seiten des andern; und zwar an derjenigen Seite (ad eas partes) von dieser, an welcher das andere Dreieck liegt.

Für Fall I., da die BA, AC einander gleich sind, und also auch ED, DF.

Beweis 1. Man lege an eine der Seiten DE des Dreiecks, das den kleinern Winkel EDF hat, in D einen dem BAC gleichen Winkel EDJ (I, 13.), und schneide von dessen Schenkel DJ ein der AC oder DF gleiches Stück ab: so wird dessen Endpunkt oberhalb der EF und ihrer Verlängerung fallen. Denn er kann nicht auf die verlängerte EF selber fallen, wie auf H: sonst wäre DH>DF, weil jede von der Spitze eines gleichschenklichten Dreiecks an die verlängerte Grundlinie gehende gerade Linie gröfser als einer der gleichen Schenkel ist (§. 201, b.): es ist aber auch die DH der DF gleich (Vorauss.): welches unmöglich ist. Und noch viel weniger kann er unterhalb der EF fallen, wie auf J; weil sonst, da im Dreieck DEJ die EF verlängert der DJ begegnen müfste, wie in H, die DH aber >DF ist (§. 201, b.), noch viel mehr die DJ>DF wäre; also ihr nicht gleich seyn kann. Demnach fällt er oberhalb der EF, wie auf G: man ziehe EG, FG. So ist BC=EG (I, 4.). Nun aber,

a) da die Winkel DFG, DGF gleich sind (I, 5.); daher Winkel DFG >EGF, und noch mehr Winkel EFG >EGF: so ist (I, 19.) EG>EF: folglich auch BC>EF.

b) Oder: die DF, EG schneiden einander in K; so sind (I, 20.) DK, KG zusammen >DG d. i. DF; mithin KG>KF. Daher, wenn man die EK hinzunimmt, die EG>EK, KF zusammen: aber (I, 20.) EK, KF zusammen >EF: folglich noch viel mehr EG>EF. Daher auch BC>EF. — Oder da die DK, KG>DG, und die FK, KE>EF (I, 20.) so sind (Ax. 4. Zus.) die DF, EG>DG, EF. Von diesen sind aber die DF, DG gleich. Daher EG>EF; und mithin BC>EF.

c) Oder da auf einerlei Grundlinie FG und an einerlei Seite derselben ein gleichshenklichtes Dreieck DFG und ein anderes EFG stehen, dessen Seite EG den Schenkel DF des gleichshenklichten schneidet: so ist (§. 206, a.) die genannte Seite EG gröfser als die andere EF. Also BC>EF.

Anm. Auch ist der Winkel DEF>DEG (Ax. 9.): dem Winkel DEG ist aber der ABC gleich (I, 4.): folglich ist der Winkel DEF>ABC.

Demnach „wenn die Schenkel zweier gleichschenklichten Dreiecke gleich, ihre Winkel an den Spitzen aber ungleich sind: so sind ihre Grundlinien und Winkel an den Grundlinien ungleich; nämlich die Grundlinie desjenigen ist gröfser, dessen Winkel an der Spitze gröfser ist; hingegen sind die Winkel an der Grundlinie desjenigen gröfser, dessen Winkel an der Spitze kleiner ist."

Beweis 2. (*Fig.* 141, a.) Man lege an eine der Seiten AB des Dreiecks, das den gröfsern Winkel BAC hat, in A einen dem kleinern EDF gleichen Winkel BAJ, dessen Schenkel AJ verlängert der BC begegnen wird; es geschehe in H. So ist die AH<AC, weil in jedem gleichschenklichten Dreieck eine innerhalb desselben von der Spitze an die Grundlinie gezogene gerade Linie kleiner als jeder der gleichen Schenkel ist (§. 201, b.). Man verlängere sie also, und mache die AL der AC oder DF gleich; und ziehe BL. So ist (I, 4.) BL=EF, und Winkel ABL=DEF. Nun läfst sich aber wiederum, wenn man auch die CL zieht, auf jede der Arten wie vorhin bei a), b) und c), zeigen, dafs die BC>BL seye: folglich ist auch die BC>EF. Auch ist der Winkel ABC<ABL d. i. DEF.

§. 244. Beweis für Fall II., da die AB, AC, mithin auch DE, DF ungleich sind.

Beweis 1. (*Fig.* 140, a.) Es seyen AB, DE die kleinern Seiten. Man lege an die kleinere Seite DE des

Dreiecks, das den kleineren Winkel EDF hat, in D einen dem gröfsern BAC gleichen Winkel EDJ, und schneide von dessen Schenkel DJ ein der AC oder DF gleiches Stück ab: so wird dessen Endpunkt oberhalb der EF und ihrer Verlängerung fallen. Denn er kann nicht auf die Verlängerung von EF fallen, wie auf H: sonst wäre DH>DF, weil, wenn von der Spitze D eines ungleichschenklichten Dreiecks, dergleichen hier das DEF ist, an die über den gröfsern Schenkel, wie DF, hinaus verlängerte Grundlinie eine gerade Linie gezogen wird, dieselbe gröfser als der gröfsere Schenkel ist (§. 202.). Und noch weniger kann er unter die verlängerte EF oder EH fallen, wie auf J; weil sonst noch vielmehr DJ>DF wäre. Mithin fällt er oberhalb der EF, wie auf G. Und nun wird ebenso wie in Beweis 1. des vorherg. §. 243., gezeigt; dafs BC>EF; wie auch, dafs der Winkel DEF>ABC sey.

Demnach „Wenn in zwei ungleichschenklichten Dreiecken die Schenkel zwei und zwei gleich, aber ihre Zwischenwinkel ungleich sind: so sind ihre dritten Seiten, und ihre den gröfsern Schenkeln gegenüberliegenden Winkel ungleich;" nämlich die dritte Seite desjenigen ist gröfser, dessen Zwischenwinkel zwischen den, zwei und zwei gleichen, Schenkeln gröfser ist; eben dieses Dreiecks Gegenwinkel des gröfsern Schenkels aber ist kleiner als der des andern.

Dieser Beweis mit Bew. 1. für den ersten Fall in §. 243. zusammen genommen machen den Simson'schen Beweis vom I, 24. aus (s. Matthias Auszug S. 11.): aufser dafs das, was nach Simson dadurch einleuchtend werden soll, dafs man sich einen um D mit dem Halbmesser DF gezeichneten Kreis gedenke, hier ohne diesen Kreis, von welchem der Simson'sche Beweis doch eine eben so gut, wie III, 2., eines Beweises bedürftige Eigenschaft vorauszusetzen scheint (vgl. §. 117.; Chrest. geom. p. 230. nr. 10. p. 271. nr. 3.), auf die Sätze §§. 201. 202. reducirt ist: nämlich dafs der Punkt G oberhalb der EF falle.

Beweis 2. (*Fig.* 141, d.) Es seyen wiederum AB, DE die kleinern Seiten. Man lege an die kleinere Seite AB des Dreiecks, das den gröfsern Winkel BAC hat, in A einen dem kleineren EDF gleichen Winkel BAJ, dessen Schenkel AJ der BC in H begegne: so ist die AH<AC, weil in jedem ungleichschenklichten Dreieck eine von der Spitze an die Grundlinie gezogene

gerade Linie kleiner als der gröfsere Schenkel des Dreiecks ist (§. 202.). Man verlängere also die AH, und mache die AL der AC oder DF gleich u. s. w. So wird, wie im Beweis 2. §. 243. gezeigt, dafs die BC (>BL und daher) >EF, und der Winkel ABC< (ABC< d. i.) DEF sey. — Dieses, verbunden mit Beweis 2. in §. 243., ist der Pfleiderer'sche Beweis in Chrestom. geom. S. 316. nr. 6.

Beweis 3. (*Fig.* 140, a.) Es seyen AB, DE die gröfseren Seiten. Man lege an die gröfsere Seite DE des Dreiecks, das den kleinern Winkel EDF hat, in D einen dem gröfsern BAC gleichen EDJ an, und schneide von dessen Schenkel DJ ein der DF oder AC gleiches Stück ab: so wird dessen Endpunkt entweder oberhalb der EF und ihrer Verlängerung, oder auf ihre Verlängerung, oder unterhalb derselben fallen. Es ist nun zu zeigen, dafs, und unter welchen Umständen, diese verschiedene Arten, wie besagter Endpunkt fallen könne, Statt haben.

Wenn der Winkel EFD ein rechter oder spitziger ist; so wird jener Endpunkt oberhalb der EF und ihrer Verlängerung fallen. Denn er kann nicht auf deren Verlängerung fallen, wie in H: sonst wäre die DH, die der DF gleich seyn soll, gröfser als die DF (§. 198, 3)): und noch weniger kann er unterhalb fallen, wie in J; sonst wäre noch viel mehr die DJ gröfser als die DF (wie in §. 243. Bew. 1.); da sie ihr doch gleich seyn soll. Folglich fällt der genannte Endpunkt oberhalb der EF und ihrer Verlängerung: er sey G; so dafs DG =DF sey.

(*Fig.* 140, b.) Wenn der Winkel EFD ein stumpfer ist: so läfst sich an die Verlängerung der DE über F hinaus eine der DF gleiche ziehen (§. 209, 2). Fall III., weil nämlich sein Nebenwinkel DFH alsdann ein spitzer ist): man ziehe sie, und es sey die DH. Nun ist der Winkel BAC, welcher gröfser ist als der EDF (Voraus.), entweder gröfser als der Winkel EDH, oder ihm gleich, oder kleiner.

Ist er gröfser als der Winkel EDH: so fällt mithin der Schenkel DJ aufserhalb des Winkels EDH; und da der Winkel DHE in dem gleichschenklichten Dreieck DFH spitzig ist (§. 175, b.); so folgt aus denselben Gründen, wie vorhin, dafs der Endpunkt G des von der DJ abgeschnittenen der DF oder DH gleichen Stückes weder auf die Verlängerung der EF noch unterhalb der-

selben fallen kann; folglich oberhalb derselben fallen muſs: er falle in G.

In allen diesen Fällen nun läſst sich auf die nämlichen Arten, wie in §. 243. Bew. 1., zeigen, daſs die EG, und daher auch die BC, gröſser als EF sey. — Daſs aber ferner auch der Winkel DFE gröſser als der Winkel ACB oder DGE, läſst sich so zeigen: 1) wenn der Winkel DFB ein rechter oder stumpfer ist. Da der Winkel DGF als Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten Dreiecks DFG spitzig ist (§. 175.): so ist noch viel mehr der Winkel DGE spitzig; und folglich $<$DFE. 2) (*Fig.* 140, c.) Wenn der Winkel DFE spitzig ist: so läſst sich, da DE$>$DF, aus D an die EF eine der DF gleiche DK ziehen (§. 209, 2): und wenn man die KG zieht, so ist Winkel DGK=DKG (I, 5.) also $<$DKF d. i. DFK; und noch viel mehr Winkel DGE$<$DFE.

(*Fig.* 140, b.) Ist aber der Winkel BAC dem Winkel EDH gleich, und fallen mithin die Punkte H, G zusammen: so ist offenbar EG d. i. BC$>$EF. Auch ist der Winkel DGE$<$DFE (I, 16.), und folglich auch Winkel ABC$<$DFE.

(*Fig.* 140, d.) Ist endlich der Winkel BAC kleiner als der Winkel EDH: so fällt der Schenkel DJ innerhalb des Winkels FDH: und da in dem gleichschenklichten Dreiecke DFH jede von der Spitze D an die Grundlinie FH gezogene gerade Linie kleiner ist als der Schenkel DF (§. 201, b.): so wird der Endpunkt des von der DJ abgeschnittenen der DF gleichen Stücks unterhalb der EH fallen, wie in G. Man ziehe die EG: nun sind,

a) da innerhalb des Dreiecks EGD auf seiner Seite DE die EF, FD zusammengestellt sind, die EF, FD zusammen kleiner als die EG, GD (I, 21.): von diesen sind aber die FD, GD gleich: folglich die EF$<$EG, oder die EG d. i. BC$>$EF.

b) Oder man ziehe FG, und verlängere DF nach M: so ist Winkel MFG=FGJ (I, 5. 2 Thl.) (als Winkel unter der Grundlinie des gleichschenklichten Dreiecks DFG) und mithin $>$FGE; und noch viel mehr Winkel EFG $>$FGE; daher (I, 19.) EG d. i. BC$>$EF.

c) Oder da auf einerlei Grundlinie FG und an verschiedenen Seiten derselben zwei Dreiecke stehen, deren eines DFG gleichschenklicht ist, und eine Seite GE des andern die Verlängerung FM eines Schenkels des

ersten schneidet: so ist dieses andere Dreieck ungleichschenklicht, und die genannte Seite GE gröfser als die FE (nach §. 206, b.); daher auch BC > FE.

Auch ist in diesem Falle, wie in dem vorhergehenden, der Winkel EGD d. i. AGB < EFD, vermöge I, 21. — Diese drei Fälle des Punkts G werden bei Proclus (s. Chrestom. geom. p. 268. s.) und in der Uebersetzung des Campanus aufgezählt, und der Beweis des Satzes 24. für jeden dieser Fälle gegeben, aber ohne zu zeigen, dafs, und in welchen Umständen dieselbe Statt haben, oder wovon sie abhängen.

Beweis 4. (*Fig.* 141, a.) Es seyen AB, DE die gröfsern Seiten. Man lege an die gröfsere Seite AB des Dreiecks, das den gröfsern Winkel BAC hat, in A einen dem kleinern EDF gleichen Winkel BAJ an, dessen Schenkel AJ der BC in H begegne.

(*Fig.* 141, b.) Ist nun der Winkel ACB ein rechter oder stumpfer: so ist die AH > AC (§. 198, 3.): man schneide von der AH ein der AC oder DF gleiches Stück AL ab, und ziehe BL. So ist diese = EF (I, 4.). Und nun,

a) da BC, CA zusammen > BL, LA (I, 21.); und AC, AL gleich: so ist BC > BL d. i. EF.

b) Oder zieht man CL, und verlängert AC nach N: so ist Winkel HLC = LCN (I, 5.), also > LCB; und noch viel mehr Winkel BLC > LCB; also (I, 19.) BC > BL oder EF.

c) Dieses läfst sich wiederum auch durch §. 206, b. schliefsen.

Auch ist der Winkel ALB d. i. DFE > ACB (I, 21.).

(*Fig.* 141, c.) Ist aber der Winkel ACB spitzig: so läfst sich, da AB > AC ist, von A an die BC eine der AC gleiche ziehen (§. 209, 3) Fall II.): sie werde gezogen, und es sey die AK. Nun ist entweder der Winkel EDF kleiner als der BAK, oder ihm gleich, oder gröfser.

Ist der Winkel EDF < BAK: so fällt die AJ innerhalb des Winkels BAK, und es ist AH > AK (§. 201, b.). Und schneidet man wiederum die AL = AK oder AC oder DF ab: so wird wie vorhin bewiesen, dafs BC > BL d. i. EF, und Winkel ACB < ALB d. i. DFE sey.

Ist aber der Winkel EDF = BAK: so ist, da auch die zwei BA, AK den zweien ED, DF gleich sind, die BK = EF (I, 4.): folglich BC > EF. Auch ist Winkel ACB < AKB (I, 16.) d. i. DFE.

(*Fig.* 141, d.) Ist endlich Winkel EDF>BAK: so fällt die AJ innerhalb des Winkels KAC, und im gleichschenklichten Dreieck AKC ist die AH<AC (§. 201, b.). Man verlängere sie, bis AL=AC oder DF; und ziehe BL. So läfst sich wiederum ebenso wie in §. 243. Beweis 2., zeigen, dafs die BC>BL d. i. EF sey. Auch ist, wenn man KL zieht, Winkel ALK=AKL (I, 5.) >AKC oder ACB, und noch viel mehr Winkel ALB d. i. EFD >ACB.

§. 245. Andere Wendung dieses Beweises.

(*Fig.* 142.) Man beschreibe ein gleichschenklichtes Dreieck, dessen Schenkel HJ, HK, jeder der AC oder DF gleich, und der Winkel JHK an der Spitze dem Unterschiede der Winkel ABC, EDF (d. i. dem Winkel FDG in der Figur zu I, 24. in der Uebers., oder dem Winkel HAC in Fig. 141.) gleich sey; und verlängere KJ nach L. Nun ist der Winkel DFE entweder dem HJL gleich oder kleiner oder gröfser.

Ist er dem Winkel HJL gleich: so schneide man von der JL die JM=FE ab: so ist auch (I, 4.) HM =DE=AB, und Winkel MHJ=EDF: daher der ganze MHK=BAC. Da also die MH, HK den BA, AC, und der Winkel MHK dem BAC gleich sind: so ist (I, 4.) MK=BC: folglich BC>MJ d. i. EF. Auch ist Winkel MKH=ACB: aber MJH=DFE (Voraus.); und (I, 16.) >MKH: folglich Winkel DFE >ACB. — In diesem Fall ist der Winkel DFE, als dem Aufsenwinkel MJH an der Grundlinie des gleichschenklichten Dreiecks HJK gleich, ein stumpfer (§. 175.), und DE >DF (§. 198, 3)), also auch AB>AC: der Winkel ACB aber, als dem Winkel an der Grundlinie HKJ gleich, ein spitzer.

Ist der Winkel DFE >HJL: so mache man ihm den Winkel HJM (I, 23.), und der EF die JM gleich; so fällt die JM unterhalb der JL; ziehe HM, MK. So ist wiederum, wie vorhin, HM=DE=AB, und MK=BC. Es ist aber MK>MJ; welches wiederum entweder aus I, 21. oder aus I, 5. 2 Thl. und I, 19. geschlossen wird. Folglich ist auch BC>EF. Ferner Winkel HJM>HKM (I, 21.), d. i. DFE >ACB. — In diesem Fall ist wiederum der Winkel DFE stumpf, und DE>DF, AB>AC.

Ist der Winkel DFE<HJL: so lege man an HJ wiederum den Winkel HJM=DFE (I, 23.); so fällt die JM oberhalb der JL: und mache JM=FE: ziehe HM, MK. So ist MK>MJ (aus I, 5. 1 Thl. und I, 19., oder aus I, 20. zweimal angewandt); d. i. BC>EF. — In

diesem Fall kann der Winkel DFE, der dem HJM gleich ist, ein stumpfer, rechter oder spitzer seyn: und der Fall hat in den beiden letztern Fällen nothwendig Statt; und namentlich, wenn die DE der DF gleich oder kleiner ist, weil alsdann der Winkel DFE nothwendig spitzig ist (§. 175.). Der Winkel ACB=HKM aber ist ein spitzer. Um in dem Fall, da der Winkel DFE oder HJM spitzig ist, zu beweisen, dafs er gröfser als HKM oder ACB sey, ziehe man an JM eine der HJ gleiche; vgl. §. 244. Bew. 3. Fig. 140, c.

§. 246. Noch eine andere Wendung desselben Beweises.

a) Man schicke den Satz voraus: (*Fig.* 142.) „Wenn ein Schenkel KH eines gleichschenklichten Dreiecks HJK über die Spitze H hinaus verlängert, und innerhalb des dadurch entstehenden Aufsenwinkels JHO irgend ein beliebiger Punkt M angenommen wird: so sind die von demselben an die Endpunkte J, K der Grundlinie gehenden geraden Linien MJ, MK ungleich; und diejenige MK die gröfsere, die an den Endpunkt K des verlängerten Schenkels geht." — Dieses ist offenbar in dem Fall, da der Punkt M in der verlängerten KJ liegt. Liegt er oberhalb derselben; so läfst es sich durch I, 5. 1 Thl. und I, 19.: liegt er unterhalb; durch I, 5. 2n Thl. und I, 19. zeigen; ebenso wie im vorhergehenden.

b) Dieses vorausgesetzt, läfst sich der Satz 24. so erweisen:

(Fig. zu I, 24. in d. Uebers.) Man bringe das Dreieck ABC auf das Dreieck DEF, und lege den Punkt A auf D, und die Seite AB auf die DE: so fällt auch B auf E; die AC aber fällt über die DF hinaus, weil der Winkel BAC>EDF. Sie falle auf DG, und C auf G, also BC auf EG; und man ziehe FG, und verlängere GD über D hinaus nach P. Es mag nun G auf die Verlängerung der EF, oder oberhalb oder unterhalb derselben fallen: so hat man ein gleichschenklichtes Dreieck DFG, dessen Schenkel GD nach P verlängert ist, und innerhalb des Aufsenwinkels PDF ist der Punkt E: also ist von den aus G an die Endpunkte F, G der Grundlinie FG gehenden geraden Linien EF, EG die an den Endpunkt G des verlängerten Schenkels GD gehende EG gröfser als die EF (nach a). Folglich auch die BC>EF: w. z. e. w.

§. 247. Anderer Beweis wiederum mittelst Construction eines dem einen Dreieck durchaus gleichen

Dreiecks an eine der seinen Seiten gleichen Seiten des andern Dreiecks; aber so, dafs die beiden Dreiecke an verschiedenen Seiten (ad diversas partes) dieser gemeinschaftlichen Seite liegen.

1. Man schicke als Vorbereitungssatz voraus: (*Fig.* 143.) „Wenn von zwei Punkten A und B, die an verschiedenen Seiten einer geraden Linie CD liegen, an deren einen Endpunkt C zwei gerade Linien AC, BC gehen, die einander gleich sind, aber mit der ersten ungleiche Winkel ACD, BCD machen: so sind die von den nämlichen zwei Punkten an den andern Endpunkt D der ersten gezogenen geraden Linien AD, CD ungleich; und diejenige AD ist die gröfsere, welche an der Seite des gröfsern Winkels ACD liegt."

Bew. Die geraden Linien AC, CB liegen entweder geradefort an einander, oder sie machen einen Winkel mit einander; und im letztern Fall liegt die erste gerade Linie CD entweder innerhalb dieses Winkels oder aufserhalb desselben.

Fall I. Die AC, CB liegen geradefort an einander. (*Fig.* 143, a.) Man errichte (I, 11.) auf der AB in C ein Perpendikel, welches (§. 129, b.) innerhalb des gröfsern Winkels ACD fallen, und daher (Ax. Anh. 3)) der AD begegnen wird: es sey CE; und man ziehe die EB. So ist (I, 4.) die AE der BE, und daher die AD den zweien BE, ED zusammen gleich. Diese sind aber $>$BD (I, 20.); Folglich ist auch die AD$>$BD.

Fall II. Die AC, CB machen einen Winkel mit einander, und die CD liege innerhalb dieses Winkels. So wird, wenn man die gerade Linie AB zieht, der Punkt D entweder auf ihr, oder an derjenigen Seite von ihr, an welcher der Punkt C liegt, oder an der andern Seite von ihr liegen.

a) (*Fig.* 143, b.) Der Punkt D liege auf der geraden AB. Da die Winkel ACD, BCD ungleich sind: so halbire man den Winkel ACB (I, 9.): und die gerade Linie, die ihn halbirt, wird (§. 111.) innerhalb des Winkels ACD fallen, und also der AD begegnen (Ax. a. a. O.): sie begegne ihr in E. So ist (I, 4.) die AE$=$EB also $>$DB; und noch viel mehr die AD$>$DB.

b) (*Fig.* 143, c.) Der Punkt D liege nicht auf der geraden AB; sondern entweder an einerlei Seite von ihr mit dem Punkt C, oder an der andern. Man halbire den Winkel ACB durch die CE, und ziehe EB; welche

der AE gleich seyn wird (I,4.). Daher ist die AD=BE+ED. Aber BE+ED>BD (I, 20.): folglich auch AD>BD.

Fall III. (*Fig.* 143, d.) Die AC, CB machen einen Winkel mit einander, und die CD liege aufserhalb dieses Winkels. Da die DC mit den zweien AC, CB ungleiche Winkel macht; so ziehe man eine andere durch C, welche gleiche Winkel mit ihnen mache (§. 127. od. I, 9. 13.): es sey die CE, welche also innerhalb des gröfsern Winkels ACD fallen, und der AD begegnen wird; es geschehe in E; und man ziehe die BE. Der Beweis ist derselbe, wie im letztern Fall.

2, Dieses vorausgeschickt; läfst sich nun der Satz I, 24. so beweisen: (*Fig.* 144, a.) Man lege an einen der Schenkel AC des gröfsern Winkels BAC und an der andern Seite desselben, als an welcher der Winkel BAC, einen dem kleinern EDF gleichen Winkel CAG, mache die AG=DF, und ziehe CG. (Oder man lege des Dreiecks EDF Schenkel DE auf den ihm gleichen Schenkel AC des Dreiecks BAC so, dafs das Dreieck DEF auf die andere Seite der AC falle, als an welcher das Dreieck BAC liegt; und es falle in die Lage ACG.) Da nun die Punkte B, G an verschiedenen Seiten der geraden Linie AC liegen, und von ihnen an den Endpunkt A der AC die geraden Linien BA, GA gehen, welche einander gleich sind, aber mit der AC ungleiche Winkel BAC, GAC machen, von welchen BAC der gröfsere ist: so sind die an den andern Endpunkt C der AC gezogenen geraden Linien BC, GC ungleich, und diejenige BC die gröfsere, welche an der Seite des gröfsern Winkels BAC liegt. Die CG ist aber der EF gleich. Folglich ist auch die BC>EF.

§. 248. Letzterer Beweis läfst sich mit einer andern Wendung und wiederum mit Beschränkung der dabei vorkommenden Fälle dadurch, dafs man das eine Dreieck an diejenige Seite des andern, die nicht kleiner als die andere ist, legt, so vortragen;

Die Winkel BAC, EDF sind entweder zwei rechten gleich, oder kleiner oder gröfser als zwei rechte.

Fall I. (*Fig.* 144, b.) Sie seyen zwei rechten gleich. Man lege eine der Seiten DE des Dreiecks DEF auf die ihr gleiche Seite AC des andern Dreiecks, und das erste Dreieck an das andere, so dafs der Punkt D auf A; E auf C falle; und F falle auf G. Da demnach der Winkel CAG dem EDF gleich ist, welcher mit dem BAC 2 rechte ausmacht: so liegt die AG geradefort an der

BA (I, 14.). Und da der Winkel BAC>EDF oder CAG: so errichte man auf der BG in A das Perpendikel AH, welches innerhalb des Winkels BAC fallen (§. 129, b.), und der BC begegnen wird; es geschehe in H.

Fall II. (*Fig.* 144, c.) Die Winkel BAC, EDF seyen zusammen kleiner als 2 rechte, Und von den Seiten des Dreiecks ABC sey die AC nicht kleiner als die AB. Man lege wiederum das Dreieck DEF an das Dreieck ABC, wie vorhin, und es bekomme die Lage ACG: und ziehe die gerade Linie BG: so wird diese innerhalb des Vierecks ABCG fallen. Denn sie kann erstlich nicht durch den Punkt C gehen: sonst wäre in dem gleichschenkl. Dreieck ABG die von der Spitze A an die Grundlinie BG gezogene AC kleiner als der Schenkel AB (§. 201, b.): sie ist aber nicht kleiner (Vorauss.): Auch kann die BG nicht aufserhalb des Vierecks ABCG fallen; sonst läge der Punkt C innerhalb des gleichschenklichten Dreiecks ABG; und da jede von der Spitze bis an die Grundlinie gehende kleiner ist als der Schenkel AB (§. 201, b.): so wäre um so mehr die AC kleiner als die AB; das ist sie aber nicht (Vorauss.). Demnach fällt die BG innerhalb der Fignr ABCG. Da nun die Winkel BAC, CAG ungleich sind, und der Winkel BAG kleiner als 2 rechte; so halbire man diesen Winkel (I, 9.) durch die gerade Linie AH, welche innerhalb des gröfsern Winkels BAC fallen, und der BC begegnen wird: sie begegne ihr in H.

Fall III. (*Fig.* 144, d.) Die Winkel BAC, EDF seyen zusammen gröfser als zwei rechte. Und man nehme einen beliebigen Schenkel AC des Winkels ABC, und lege daran das Dreieck EDF, und es falle wie vorhin in die Lage CAG. So machen die BA, AG einen Winkel mit einander, der an der andern Seite der AB liegt, als der Winkel BAC (§. 142, c.). Man halbire ihn durch die JH, welche verlängert der BC in H begegne; so werden auch die Winkel BAH, GAH einander gleich seyn (§. 141.).

In allen diesen Fällen ziehe man noch die HG: so wird diese der BH gleich seyn (I, 4.); und daher die BC den zweien GH, HC gleich; diese zwei sind aber >CG (I, 20.): folglich ist die BC >GC d. i. >EF.

§. 249. Verschiedene Ausdrücke dessen, was im Vorhergehenden bewiesen worden,

bei Fig. 140, a. d. dafs EG>EF,

bei Fig. 141, a. b. dafs BC>BL.

(*Fig.* 140, a, d.) „Wenn eine von den zwei Seiten eines Dreiecks (EFG), (die EG), entweder von dem einen Schenkel (DF) eines auf der nämlichen Grundlinie (FG) und an der nämlichen Seite derselben errichteten, oder von der Verlängerung (FM) eines Schenkels (DF) eines auf der nämlichen Grundlinie (FG) und an der andern Seite derselben beschriebenen gleichschenklichten Dreiecks (DFG) geschnitten wird: so ist sie gröfser als die andere Seite (EF) des Dreiecks." Vgl. §. 206, a. b.

„Wenn innerhalb eines Dreiecks (DEG) von seiner Spitze (D) eine gerade Linie (DF) der einen Seite (DG) des Dreiecks gleich gezogen wird; ihr Endpunkt mag nun diesseits oder jenseits der Grundlinie (EG) fallen: so ist die gerade Linie (EF), die ihren Endpunkt (F) mit dem Endpunkte der andern Seite (DE) des Dreiecks verbindet, kleiner als dessen Grundlinie (EG)."

„Wenn von der Spitze D eines Dreiecks (DEF) aufserhalb desselben und an der nämlichen Seite eines seiner Schenkel (DE), an welcher der andere Schenkel (DF) liegt, eine gerade Linie (DG) dem andern Schenkel (DF) gleich gezogen wird; ihr Endpunkt G mag nun diesseits oder jenseits der verlängerten Grundlinie (EF) fallen: so ist die gerade Linie (EG), welche ihren Endpunkt (G) und den Endpunkt (E) des ersten Schenkels verbindet, gröfser als die Grundlinie (EF) des Dreiecks."

(*Fig.* 140, a.) „Wenn in einem Viereck (DEFG) eine Seite (DG) und eine Diagonale (DF) einander gleich sind: so ist die andere Diagonale (EG) gröfser als die Gegenseite (EF) der ersten Seite."

(*Fig.* 140, d.) „Wenn auf der Grundlinie (DE) eines Dreiecks (DGE) ein anderes Dreieck (DFE) steht, dessen Spitze (F) innerhalb des ersten liegt, und dessen eine Seite (DF) der in dem nämlichen Endpunkt (D) sich endigenden Seite (DG) des ersten gleich ist: so wird seine andere Seite (EF) kleiner als die andere Seite (EG) des ersten seyn."

Folgende Ausdrücke gelten für die drei Fälle, da der Punkt G oberhalb der EF, oder auf ihre Verlängerung, oder unterhalb fällt. (*Fig.* 140, a. b. d.) „Wenn innerhalb eines Dreiecks (EDG) von seiner Spitze (D) eine gerade Linie (DF) der einen Seite (DG) des Dreiecks gleich, gezogen wird (ihr Endpunkt mag nun auch innerhalb des Dreiecks fallen oder nicht): so ist die gerade Linie (EF), welche ihren Endpunkt (F) mit dem

Endpunkt (E) der andern Seite (DE) des Dreiecks verbindet, kleiner als die Grundlinie (EG)."

„Wenn von der Spitze (D) eines Dreiecks (DEF) aufserhalb desselben und an der nämlichen Seite eines seiner Schenkel (DE), an welcher der andere Schenkel (DF) liegt, eine gerade Linie (DG) dem andern Schenkel (DF) gleich gezogen wird: so ist die zwischen ihren Endpunkt (G) und den Endpunkt (E) des ersten Schenkels (DE) fallende gerade Linie (EG) gröfser als die Grundlinie (EF) des Dreiecks."

„Wenn von einem Punkt (D) aus drei gerade Linien (DG, DF, DE) gehen, von welchen zwei (DG, DF) einander gleich sind und an einerlei Seite der dritten (DE) liegen: so ist die gerade Linie (EG), welche die Endpunkte der beiden äufsersten (DG, DE) verbindet, gröfser als diejenige (FE), welche die Endpunkte der mittlern (DF) und der dritten (DE) verbindet."

„Wenn ein Schenkel (DG) eines gleichschenklichten Dreiecks (DGF) über die Spitze (D) hinaus verlängert, und von dieser Spitze (D) aus zwischen der Verlängerung und dem andern Schenkel (DF) eine begränzte gerade Linie (DE) gezogen wird: so ist die von deren Endpunkt (E) an den Endpunkt (G) des ersten Schenkels (DG) gezogene gerade Linie (EG) gröfser als die an den Endpunkt (F) des andern Schenkels (DF) gezogene."

„Wenn von der Spitze (D) eines gleichschenklichten Dreiecks (DEG) eine begränzte gerade Linie (DE) gezogen ist, die sowohl selbst als ihre Verlängerung über besagte Spitze (D) hinaus, aufserhalb des Dreiecks fällt: so ist die von ihrem Endpunkt (E) an den Endpunkt (F) des ihr näheren Schenkels (DF) gezogene gerade Linie (EF) kleiner als die an den Endpunkt (G) des entferntern Schenkels (DG) gezogene." (Oder: „so ist ihr Endpunkt (E) dem Endpunkt (F) des ihr näheren Schenkels (DF) näher als dem Endpunkt (G) des entfernteren (DG).")

„Wenn auf einer geraden Linie (DE) in ihren Endpunkten (D, E) und an einerlei Seite derselben, zwei Paare (DG, GE; DF, FE) zusammentreffender gerader Linien aufgestellt sind; und die zwei in dem einen Endpunkt (D) aufgestellten (DG, DF) einander gleich sind: so sind die zwei in dem andern Endpunkt (E) aufgestellten (EG, EF) ungleich; und diejenige (EG) die gröfsere, die mit der gegen die erstgenannte gerade

Linie (DE) unter einem gröfsern Winkel geneigten (DG) von den gleichen, zusammentrifft." Vgl. I, 7.

„Wenn zwei Dreiecke (DFG, EFG) einerlei Grundlinie (FG) haben, und die ihre Spitzen verbindende gerade Linie DE aufserhalb beider fällt, es mögen nun beide an einerlei oder an verschiedenen Seiten derselben liegen; das eine (DFG) aber gleichschenklicht ist: so ist das andere EFG ungleichschenklicht; und derjenige Schenkel (EF) der kleinere, welcher mit demjenigen (DF) der gleichen Schenkel, der mit der die Spitzen verbindenden geraden Linie (DE) den kleinern Winkel macht, einerlei Endpunkt (F) an der Grundlinie hat."

„Wenn ein gleichschenklichtes Dreieck (DFG) mit den Endpunkten (F, G) seiner Grundlinie die zwei Schenkel (EF, EG) eines Winkels (FEG) berührt, und das Dreieck sowohl als der Winkel aufserhalb der ihre Spitzen (D, E) verbindenden geraden Linie (DE) und an einerlei Seite von ihr liegen; so schneidet der dieser geraden Linie (DE) nähere Schenkel (DF) des gleichschenklichten Dreiecks ein kleineres Stück (EF) von dem von ihm berührten Schenkel des Winkels ab, als der entferntere."

„Wenn zwei Schenkel (EF, EG) eines Winkels (FEG) von zweien Schenkeln eines andern (FDG) gleiche Stücke (DF, DG) abschneiden, und die Schenkel beider aufserhalb der die Spitzen (E, D) beider Winkel verbindenden geraden Linie (DE) und an einerlei Seite von ihr liegen: so sind die abschneidenden Schenkel (EF, EG) ungleich; und derjenige (EF), der das der genannten geraden Linie (DE) nähere (DF) der gleichen Stücke abschneidet, ist der kleinere."

§. 250. Ausdrücke desjenigen, was bei den verschiedenen Fällen von §. 247. bewiesen worden:

Bei Fall I. (*Fig.* 143, a.) „Wenn eine gerade Linie, die von der Spitze eines Dreiecks an den Halbirungspunkt seiner Grundlinie gezogen wird, mit dieser schiefe Winkel macht: so ist das Dreieck ungleichschenklicht, und an der Seite des stumpfen Winkels ist der gröfsere Schenkel."

Dem Fall II, a. entspricht der Satz §. 72, 2), §. 112. 2).

Dem Fall II, b. entsprechen folgende Sätze: 1) (*Fig.* 143, c.) „Wenn auf einer Grundlinie an verschiedenen Seiten derselben zwei Dreiecke stehen, von

welchen das eine gleichschenklicht ist; und dessen Winkel an der Spitze durch die die beiden Spitzen verbindende gerade Linie in ungleiche Theile getheilt wird: so ist das andere Dreieck ungleichschenklicht, und der gröfsere Schenkel ist an derjenigen Seite, an welcher der gröfsere Winkel ist."

2) „Wenn auf einer Grundlinie und an einerlei Seite derselben zwei Dreiecke stehen, von welchen das eine gleichschenklicht ist und das andere einschliefst; und des ersteren Winkel an der Spitze durch die die Spitzen beider verbindende gerade Linie in ungleiche Theile getheilt wird: so ist das andere ungleichschenklicht, und der gröfsere Schenkel liegt an der Seite, an welcher der gröfsere Theil des genannten Winkels liegt."

Dem Fall III. (*Fig.* 143, d.) „Wenn auf einer Grundlinie und an einerlei Seite derselben zwei Dreiecke stehen, von welchen das eine gleichschenklicht ist und von dem andern einschlossen wird; und die ihre Spitzen verbindende gerade Linie ungleiche Winkel mit den Schenkeln des gleichschenklichten macht: so ist das andere Dreieck ungleichschenklicht, und sein gröfserer Schenkel liegt an derjenigen Seite, an welcher den gröfsere der ungleichen Winkel liegt."

§. 251. Anwendungen des Satzes 24.

a) auf die Bedingungen in I, 7. Siehe in §. 209. den sich auf I, 7. beziehenden Ausdruck; „Wenn auf einer geraden Linie (DE) — — — — — von den gleichen, zusammentrifft."

b) Satz 8. läfst sich aus Satz 24. folgern. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten zweien Seiten, je eine einer, und die Grundlinie der Grundlinie gleich haben: so haben sie auch den Winkel dem Winkel gleich, der von den gleichen Seiten eingeschlossen wird. Denn wären diese Winkel ungleich: so wären nach Satz 24. auch die Grundlinien ungleich. — Diesen Beweis gibt Lacroix in §. 20. seiner Geometrie.

Nun ist zwar im Euklidischen System der Satz 24. von Satz 8. abhängig; auf zweifache Art: so ferne

1) zur Vorbereitung seines Beweises die Aufg. I, 23. gebraucht wird, bei welcher der Beweis der Auflösung auf Satz 8. beruht;

2) bei seinem Beweise der Satz 19. gebraucht wird, dessen Beweis auf Satz 18., dieser auf S. 16., dieser auf S. 15. und 10.; und von den beiden letztern wiederum

S. 15. auf S. 13., dieser auf S. 11., und dieser auf S. 8. beruht; S. 10. aber auf S. 9., und dieser wiederum auf S. 8. beruht.

Es liefse aber,

a) was die erste Abhängigkeit des Satzes 24. von S. 8. betrifft, derselben sich dadurch ausweichen, dafs man

aa) statt die Construction durch I, 23. zu machen, auf die Art, wie in der Darstellung §. 246, b. (vergl. §. 247, 2. und §. 248.) geschehen, ein Dreieck in Gedanken auf das andere bringt. — Euklid scheint zwar den Gebrauch des Auf- und Aneinanderlegens der Figuren zum Behuf der Beweise auf solche Fälle zu beschränken, da an den Figuren keine weitere Construction vorzunehmen ist, wie in den Beweisen von I, 4. 8. III, 24. VI, 15. 16.; oder da an die eine Figur die ganze der andern durchaus gleiche Figur construirt werden müfste, wie in VI, 4. 15. 18. (Vgl. I, 44. VI, 32.); und in den Fällen, da für die an die erste anzulegende Figur bereits einige Stücke der ersten als gemeinschaftliche vorliegen und sich gebrauchen lassen, um an sie die übrige Figur vermittelst vorhergegangener Aufgaben vollends auszumachen, eine solche Construction dem Auf- oder An-einander-bringen in Gedanken vorzuziehen; wie im Beweis von I, 26. Jedoch scheint diese Beschränkung nicht gerade nothwendig zu seyn.

bb) Oder auch dadurch, wenn man statt der Anlegung des gröfsern Winkels an einen Schenkel des kleinern, oder des kleineren Winkels an einen Schenkel des gröfsern mittelst I, 23., eine von I, 8. unabhängige Auflösung der Aufgabe, an einen gegebenen Winkel einen einem gegebenen gleichen anzulegen, substituirt. Nun sind von dieser Aufgabe andere Auflösungen gegeben worden in §. 168. c.; in §. 179, 4); und in §. 211, a.; von welchen zwar die in §. 168. den Satz 16., die in §. 179. in gewifser Rücksicht den Satz 17. und also auch den Satz 16. voraussetzt: der Satz 16. aber setzt wiederum S. 15. und auch S. 10. voraus. Es ist aber, was S. 15. betrifft, aus dem, was §. 57. und 155. gezeigt worden, zu ersehen, dafs derselbe auf eine von S. 8. unabhängige Art sich beweisen läfst; und wenn er auch auf die Euklidische Art durch I, 13. erwiesen wird, bei welchem I, 11. gebraucht wird: so ist I, 11. nicht nothwendig von I, 8. abhängig, sondern läfst sich auch, wie §. 124. (am Ende) bemerkt worden, durch I, 5. 4. beweisen. Was aber I, 10. betrifft; so ist dessen Auf-

gabe in §. 91, 2) auf eine von I, 8. abhängige Art aufgelöst worden.

Was nun aber

b) die zweite, auf dem Gebrauch des Satzes 19. und dessen Beweis mittelst vorhergehender Sätze beruhende Abhängigkeit des Satzes 24. von Satz 8. anbelangt: so wird diese

α) von einigen, wie z. B. Lacroix, in seiner Geometrie, durch den in §. 243, b); §. 244. angezeigten Beweis vermittelst der Sätze 20. u. 21. 1 Thl. ohne I, 19., umgangen, indem sie den Satz 20., aus dem auch der erste Theil des S. 21. folgt, ohne I, 19. aus der Erklärung der geraden Linie, dafs sie die kürzeste zwischen zwei Punkten sey, folgern. Allein was gegen diese Beweisart ist, ist schon §. 216. bemerkt worden.

β) Es liefse sich aber auch die Abhängigkeit des Satzes 19. von S. 8. dadurch heben, dafs man die Sätze, auf denen S. 16. beruht, auf eine der vorhin bei a, bb) angezeigten andern Arten bewiese.

Bei solchen Fragen, die man über mögliche Veränderungen des Euklidischen Systems an einzelnen Stellen machen kann, kommen jedoch, wenn von dem Werth, welchen eine solche Veränderung haben möchte, die Rede ist, immer mehrere Rücksichten in Betrachtung: es kommt nicht blofs auf das Bindende und die logische Schlufskraft der einzelnen Beweise; es kommt auch auf den Zusammenhang der Sätze an, auf die mehrere oder mindere Einfachheit und Kürze des Ganges, auf die Harmonie der Theile u. dgl. (Lamberts Org. Dianoiol. §. 620. f.) — Im gegenwärtigen Falle, wo es sich von den Veränderungen im System handelt, welche nöthig wären, wenn man den Satz 24. dem Satz 8. voranstellen, und letztern durch den erstern beweisen wollte; wie fern eine solche Veränderung möglich wäre, und was sie für einen Werth hätte; wird es schwer halten, einen von dem Euklischen verschiedenen Gang ausfindig zu machen, der dem Euklidischen vorzuziehen wäre.

§. 252. Andere Folgerungen aus Satz 24.

1) „Wenn in einem Dreieck die von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gezogene gerade Linie schiefe Winkel mit dieser macht: so ist das Dreieck ungleichschenklicht; und der gröfsere Schenkel liegt an der Seite des stumpfen Winkels." Ist §. 247. (vgl. §. 250.) auf andere Art bewiesen worden.

2. „Wenn in einem gleichschenklichten Dreiecke der Winkel an der Spitze durch eine gerade Linie in zwei ungleiche Theile getheilt wird: so theilt sie auch die Grundlinie in ungleiche Theile, und macht mit ihr schiefe Winkel; von welchen der gröfsere Theil und der spitze Winkel an der Seite des gröfsern Theils des Winkels an der Spitze liegt." Ist in §. 72. u. 178. auf andere Art bewiesen.

3. „Wenn in einem Viereche zwei an einander liegende Seiten gleich sind; der Winkel aber, den sie einschliefsen, von der durch ihn gehenden Diagonale ungleich getheilt wird: so sind die zwei übrigen Seiten einander ungleich; und die gröfsere liegt an derjenigen Seite der Diagonale, an welcher der gröfsere Theil des genannten Winkels liegt."

Diese Anwendungen sind zum Theil in der Chrest. geom. Anhang II. S. 328. 357. bemerkt.

4. „Wenn an einen auf einer geraden Linie, die von der Spitze eines Winkels aus gezogen ist, und den Winkel in ungleiche Theile theilt, angenommenen Punkt aus den Endpunkten zweier gleichen von seinen Schenkeln abgeschnittenen Stücke gerade Linien gezogen werden: so sind dieselbe a) ungleich; und diejenige ist gröfser, die innerhalb des gröfsern Theils des Winkels gezogen ist."

b) „Auch machen sie mit den Schenkeln ungleiche Winkel; und zwar macht die innerhalb des gröfsern Theils gezogene den kleinern, wenn der angenommene Punkt unterhalb der die Endpunkte der gleichen Schenkel verbindenden geraden Linie liegt; den gröfsern aber, wenn er oberhalb derselben liegt." — (*Fig.* 143, c.) Denn es sey der Winkel ACB, von dessen Schenkeln CA, CB gleiche Stücke seyen, durch die CD ungleich getheilt, und ACD der gröfsere Theil: und es sey erstlich der Punkt D unterhalb der AB. So ist DA > DB (aus I, 24.); daher (I, 18.) Winkel DBA > DAB. Aber da CA = CB; so ist (I, 5.) Winkel CBA = CAB. Folglich (Ax. 4.) der ganze CBD > CAD.

Nun sey aber zweitens der Punkt D oberhalb der AB. So ist, wie vorhin, Winkel CAB = CBA; und Winkel DAB < DBA: daher (Ax. 5.) Winkel CAD > CBD.

5. Durch §. 190. angewandt auf Fall I. des §. 247. durch I, 5. beim Fall II, a. daselbst; durch nr. 4. beim Fall II, b., und durch einen ähnlichen Schlufs wie in nr. 4. beim Fall III. ebendaselbst, ergibt sich bei den

dortigen Beweisen in Betreff der den kleinern Schenkeln gegenüberliegenden Winkel folgender

Zusatz zu I, 24. „Wenn in zwei ungleichschenklichten Dreiecken die Schenkel zwei und zwei gleich, aber ihre Zwischenwinkel ungleich sind: so sind ihre den kleinern Schenkeln gegenüberliegenden Winkel

Fall I.) ungleich, wenn die zwei Zwischenwinkel zusammen $= 2$ rechten sind; und der gröfsere in dem Dreieck, das den gröfsern Zwischenwinkel hat;

Fall II, a.) gleich, wenn die zwei Zwischenwinkel < 2 rechte, und die zwei Gegenwinkel der gröfsern Schenkel $= 2$ rechten sind;

Fall II, b.) ungleich, wenn die zwei Zwischenwinkel < 2 rechte; und der gröfsern Schenkel zwei Gegenwinkel $\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}$ zwei rechte sind; und der $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsere}\\\text{kleinere}\end{matrix}\right\}$ ist in dem Dreiecke, das den gröfsern Zwischenwinkel hat;

Fall III.) ungleich, wenn die zwei Zwischenwinkel > 2 rechte sind; und der kleinere ist in dem Dreiecke, das den gröfsern Zwischenwinkel hat.

Satz XXV.

§. 253. a. Dieser hat mit Satz XXIV. die erste Bedingung, oder, je nachdem man rechnet, die zwei ersten Bedingungen gemein; seine übrige Bedingung ist, was in jenem Folge war; und seine Folge, was in jenem übrige Bedingung war: er ist also Converse des Satzes XXIV.

b. Hier gilt auch von zwei Dreiecken, was in I, 18. von einem Dreieck galt: dafs der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüberliege; aber hier unter der Bedingung, dafs die zwei Dreiecke die zwei übrigen Seiten den zwei übrigen, je eine einer, gleich haben. Dieser Satz unterscheidet sich also von Satz 18. ebenso, wie Satz 24. von Satz 19. (§. 240.)

c. Er ist ähnlicher Gegensatz von Satz 8., wie Satz 24. von Satz 4. (§. 241.)

§. 254. Beweis: Vermöge S. 4. können unter den Bedingungen des 25sten Satzes die Gegenwinkel der ungleichen dritten Seiten (oder Grundlinien) nicht gleich seyn; und zufolge Satz 24. kann in dem Dreiecke, dessen dritte Seite (oder Grundlinie) die gröfsere ist, der Gegenwinkel von dieser nicht kleiner seyn, als der Gegenwinkel der dritten Seite (oder Grundlinie) im andern

Dreieck. Folglich ist der Gegenwinkel der dritten Seite (oder Grundlinie) in dem Dreieck, welches die gröfsere hat, gröfser als in dem Dreieck, welches die kleinere hat.

§. 255. Anderer directer Beweis mittelst Anlegung eines der beiden Dreiecke an das andere, und zwar mit einer der zwei und zwei gleichen Seiten, so dafs sie an verschiedenen Seiten (ad diversas partes) von dieser liegen; namentlich mit derjenigen von den zwei Seiten eines Dreiecks, welche nicht kleiner als die andere Seite desselben Dreiecks ist.

Es seyen in den Dreiecken ABC, DEF die Seiten BA, AC (Fig. zu I, 25. in d. Uebers.) den Seiten ED, DF, je eine einer, gleich; die Grundlinie BC aber gröfser als die EF.

(*Fig.* 144.) An die Seite AC, welche nicht kleiner ist als die andere AB, lege man ein Dreieck AGC, dessen übrige Seiten AG, GC den DE, EF je eine einer, gleich seyen; so ist auch der Winkel CAG dem EDF gleich (I, 8). Nun liegen entweder die BA, AG geradefort an einander, oder sie machen einen Winkel mit einander; und im letztern Fall liegt die AC entweder innerhalb dieses Winkels oder aufserhalb desselben.

Fall I. (*Fig.* 144, b.) Die BA, AG liegen geradefort aneinander. Da die BC>EF d. i. CG: so ist Winkel BGC>GBC (I, 18.). Man lege (I, 23.) an die BG den Winkel BGH=GBC, und ziehe die AH: so ist der Winkel BAH ein rechter (I, 6. 8.); also BAC stumpf, und >CAG d. i. EDF.

Fall II. (*Fig.* 144, c.) Die BA, AG machen einen Winkel mit einander, und die AC liege innerhalb desselben. Da die AB, AG gleich sind, und AC nicht kleiner: so fällt der Punkt C von A an jenseits der BG (§. 201.); und da BC>EF d. i. CG: so ist Winkel BGC>GBC (I, 18.). Man lege an BG den Winkel BGH=GBC, und ziehe AH: so sind (I, 6.) die BH, HG gleich; daher (I, 8.) Winkel BAH=HAG; folglich BAC>CAG d. i. EDF.

Fall III. (*Fig.* 144, d.) Die AC falle aufserhalb des Winkels BAG. Da BC>EF d. i. CG: so ist (I, 18.) Winkel CGB>CBG. Man lege an die BG dem Winkel CBG, welcher >ABG d. i. BGA (I, 5.), den Winkel BGH gleich an, und ziehe AH. So ist (I, 6.) BH =HG; daher (I, 8.) Winkel BAH=HAG, und BAC>CAG d. i. EDF.

§. 256. Eben derselbe Beweis läfst sich mit einer andern Wendung und ohne die Einschränkung des Aneinanderlegens auf diejenige Seite, die nicht kleiner ist als die andere, so darstellen:

1. Vorbereitungssatz: (*Fig.* 143.) „Wenn von zwei Punkten A, B, die an verschiedenen Seiten einer geraden Linie CD liegen, an einen Endpunkt dieser C zwei gleiche AC, BC, und an den andern D zwei ungleiche gerade Linien AD, BD gezogen sind: so sind die Winkel ACD, BCD, welche die gleichen gezogenen mit der ersten geraden Linie einschliefsen, ungleich; und derjenige ACD, der mit der gröfsern AD der ungleichen an einerlei Seite liegt, ist der gröfsere.

Bew. Eintheilung der Fälle wie in §. 247.

Fall I. (*Fig.* 143, a.) Die AC, CB liegen geradefort aneinander. Da die AD $>$BD: so ist (I, 18.) Winkel ABD$>$BAD. Man mache den Winkel ABE$=$BAD, und ziehe CE. So ist Winkel ACE$=$ECB (I, 6. 8.) $>$DCB, und noch mehr Winkel ACD $>$DCB.

Fall II. Die AC, CB machen einen Winkel mit einander, und die CD liege innerhalb dieses Winkels; der Punkt D aber

a) (*Fig.* 143, b.) auf der geraden AB. Da die AD $>$DB; so halbire man die AB in E, und ziehe CE. So ist (I, 8.) Winkel ACE$=$ECB; daher Winkel ACD $>$DCB.

b. (*Fig.* 143, c.) nicht auf der geraden AB, sondern an der einen oder andern Seite von ihr. Der Beweis für den einen Unterfall ist in §. 255. bei Fall II. daselbst, gegeben worden; der für den andern Unterfall ist diesem ähnlich.

Fall III. Die CD liege aufserhalb des Winkels ACB. Beweis bei Fall III. §. 255.

2. Dieses vorausgeschickt, läfst sich Satz 25. so beweisen: (*Fig.* 144.) Man lege an die AC das Dreieck AGC, dessen Seiten AG, GC den Seiten ED, DF gleich seyen: die AC aber ist nach der Vorauss. der DF gleich; und da ED$=$BA (Vorauss.): so ist auch die AG$=$BA; und da die BC$>$EF, so ist sie auch $>$CG. Weil demnach von den Punkten B und G, die an verschiedenen Seiten der geraden Linie AC liegen, an deren Endpunkte A und C die gleichen BA, GA, und die ungleichen BC, GC gezogen sind, und von diesen die BC die gröfsere ist: so ist (nr. 1. dieses §.) der Winkel BAC $>$CAG d. i. $>$EDF.

§. 257. In letzterm Beweise sind die Beweise folgender Sätze enthalten:

Bei Fall I. des vorherg. §. „Wenn in einem ungleichschenklichten Dreiecke eine gerade Linie von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gezogen wird: so macht sie mit ihr schiefe Winkel; und der an der andern Seite des gröfsern Schenkels liegende ist stumpf."

Bei Fall II, a. der Satz §. 71, 2).

Bei Fall II, b. die zwei Sätze: „Wenn auf Einer Grundlinie an verschiedenen Seiten derselben zwei Dreiecke stehen, ein gleichschenklichtes und ein ungleichschenklichtes, und die die Spitzen beider verbindende gerade Linie innerhalb der beiden Dreiecke fällt: so theilt sie den Winkel an der Spitze des gleichschenklichten in ungleiche Theile; und der gröfsere Theil liegt an derjenigen Seite, an welcher der gröfsere Schenkel des ungleichschenklichten liegt."

Und „wenn auf einerlei Grundlinie und an einerlei Seite derselben zwei Dreiecke stehen, ein gleichschenklichtes und ein ungleichschenklichtes, und das ungleichschenklichte von dem gleichschenklichten eingeschlossen ist: so theilt die ihre Spitzen verbindende gerade Linie den Winkel an der Spitze des gleichschenklichten in ungleiche Theile; und der gröfsere Theil liegt an derjenigen Seite, an welcher der gröfsere Schenkel des ungleichschenklichten liegt.

Bei Fall III. „Wenn auf Einer Grundlinie und an einerlei Seite derselben zwei Dreiecke stehen, ein gleichschenklichtes und ein ungleichschenklichtes; und, das gleichschenklichte von dem ungleichschenklichten eingeschlossen ist: so macht die ihre Spitzen verbindende gerade Linie mit den Schenkeln des gleichschenklichten ungleiche Winkel; und der gröfsere Winkel ist an derjenigen Seite, an welcher der gröfsere Schenkel des ungleichschenklichten ist."

§. 258. Anderer directer Beweis des Satzes 25., ebenfalls mit Anlegung der Dreiecke an einander, aber mit den ungleichen Grundlinien.

A. Vorbereitungssatz: (*Fig.* 145.) „Wenn aus zwei Punkten B, C, die an verschiedenen Seiten einer geraden Linie Aa liegen, zwei und zwei gleiche gerade Linien an die erste gehen; und zwar das eine Paar BA, CA an ihren Endpunkt A geht, das andere Paar BD, CE aber ungleiche Stücke AD, AE von dem genannten

Endpunkt A an von ihr abschneidet; so wird von den Winkeln ABD, ACE, welche je eine der ersteren mit einer der letzteren an den anfangs genannten Punkten B, C machen, derjenige ABD gröfser seyn, welchen die das gröfsere Stück (AD) abschneidende BD des zweiten Paars mit der von dem nämlichen Endpunkt B ausgehenden BA des ersten Paars macht."

Es liegen aber die BA, AC entweder geradefort an einander, oder sie machen einen Winkel miteinander, und die Aa liegt entweder aufserhalb dieses Winkels oder innerhalb desselben.

Fall I. (*Fig.* 145, a.) Die BA, AC liegen geradefort aneinander. Man verlängere die CE, welche der BD begegnen wird: es geschehe in F. Da nun die CE, BD gleich sind (Vorauss.): so ist CE>BF, und noch viel mehr CF>BF; folglich (I, 18.) Winkel ABF>ACF; w. z. e. w.

Fall II. (*Fig.* 145, b.) Die BA, AC machen einen Winkel mit einander, und die Aa falle aufserhalb dieses Winkels.

Man verlängere wiederum die CE nach F, wo sie der BD begegne, und ziehe BC. So ist, wie vorhin, CF>BF; mithin Winkel CBF>BCF. Von diesen ist aber Winkel CBA=BCA (I, 5.), weil AB, AC gleich sind. Folglich ist (Ax. 31.) der übrigbleibende Winkel ABD>ACE.

Fall III. Die BA, AC machen einen Winkel mit einander, und Aa liege innerhalb dieses Winkels. Man ziehe die BC. Nun liegt entweder

1) (*Fig.* 145, c.) der Punkt D auf der BC, und der Punkt E oberhalb derselben. Da nun (I, 5.) die Winkel ABC, ACB gleich sind: so ist Winkel ABC>ACE;

2) (*Fig.* 145, d.) oder der Punkt E auf der BC, und der Punkt D unterhalb derselben. So ist wiederum, da die Winkel ABC, ACB gleich sind, Winkel ABD>ACE;

3) (*Fig.* 145, e.) oder beide Punkte D, E liegen oberhalb der BC. Man verlängere die BD, bis sie der CE in F begegne: so ist BF>CF; also Winkel BCF>CBF; und wenn man diese von den gleichen ACB, ABC wegnimmt: so ist der übrigbleibende ACE<ABD;

4) (*Fig.* 145, f.) oder beide Punkte D, E liegen unterhalb der BC. Man verlängere CE, bis sie der BD in F begegne: so ist, weil CE=BD (Vorauss.), CF>BF; daher Winkel CBF>BCF; und wenn man zu diesen die gleichen ABC, ACB hinzunimmt, Winkel ABD>ACE;

5) (*Fig.* 145, g.) oder der Punkt D liegt unterhalb, E oberhalb der BC. So ist Winkel ABC=ACB (I, 5.) >ACE; also noch mehr Winkel ABD>ACE.

B. Hieraus nun Satz 25. (*Fig.* 146, a.) Es seyen in den zwei Dreiecken ABC, DEF die Seiten BA, AC den Seiten ED, DF, je eine einer, gleich, die Grundlinie BC aber gröfser als die EF: so wird Winkel BAC>EDF seyn. Bew. Man schneide von der gröfsern BC die der kleinern EF gleiche BH ab, und lege des Dreiecks EDF Grundlinie EF längs der BH, und den Punkt E auf B; daher auch F auf H fallen wird; und zwar so, dafs das Dreieck EFD aufserhalb des Dreiecks ABC falle: und der Punkt D falle auf G: So ist mithin die BG der DE, und also der BA gleich; ferner die GH der DF, und also auch der AC gleich. Da demnach aus den zwei Punkten A, G, die an verschiedenen Seiten der geraden BC liegen, ein Paar gleiche gerade Linien AB, GB an deren Endpunkt B gehen, und ein anderes Paar gleiche AC, GH die ungleichen Stücke BC, BH von ihr abschneiden, von welchen BC das gröfsere ist: so ist vermöge des vorausgeschickten Satzes A. Winkel BAC>BGH d. i. >EDF; und dieses gilt, die geraden BA, BG mögen an einander geradefort liegen, oder einen Winkel machen; und die BC möge aufserhalb oder innerhalb dieses Winkels fallen; und im letztern Fall mögen die Punkte C, H in Absicht auf die gerade Linie, die man von A nach G zieht, liegen, wie sie wollen.

Von den verschiedenen aufgezählten Fällen, welche bei diesem Beweis zu unterscheiden sind, trägt Proclus einen einzigen Fall bewiesen vor; und schreibt den Beweis dem Menelaus von Alexandrien zu. (Chrestom. geom. p. 270.)

§. 259. Noch tritt aber die Frage ein: ob und unter welchen Bedingungen alle die im vorhergehenden §. aufgezählten Fälle Statt haben? und zwar erstlich in Beziehung auf

Fall I. (*Fig.* 145, a.) Wenn zwei gleiche gerade Linien BA, AC geradefort an einander liegen: ob und unter welchen Bedingungen an eine von A ausgehende Aa aus B und C sich zwei gleiche BD, CE ziehen lassen, so dafs der Abschnitt AD>AE sey?

Dieses wird nun nicht möglich seyn, wenn der Winkel BAD ein rechter oder stumpfer ist. Denn in diesen Fällen ist, der Punkt E sey zwischen A und D, wo man will, wenn man BE zieht, der Winkel BED stumpf

(I, 16.): also BD $>$BE (§. 198, 3)). Die BE ist aber $=$CE, wenn BAE ein rechter (I. 4.): und $>$CE, wenn er ein stumpfer, vermöge I, 24, weil alsdann Winkel BAE $>$CAE. Folglich ist in beiden Fällen die BD $>$CE, d. i. gröfser als jede von C an irgend einen zwischen A und D liegenden Punkt der Aa gezogene.

Es sey nun aber der Winkel BAa spitzig; man ziehe CD. Da also Winkel CAD $>$BAD ist, die CA, AD aber der BA, AD gleich; so ist (I, 24.) CD $>$BD. Wiederum, da der Winkel CAD stumpf ist: so ist die CD, wie auch jede von C an die AD gezogene gröfser als CA (§. 198. 3)). Ist demnach die BD $\left.\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}$ BA oder CA: so läfst sich keine der BD gleiche von C an die AD ziehen. Ist aber die BD $>$BA oder CA; so läfst sich zwischen CA und CD von C aus eine der BD, welche $>$CA und $<$CD ist, gleiche CE ziehen. (§. 209, 3))

Bei Fall II. fragt sich: (*Fig.* 145, b.) Ob und unter welchen Bedingungen, wenn die Aa aufserhalb des Winkels BAC liegt, oder (§. 142. a, 2)) wenn die Winkel BAa, CAa zusammen $>$2 rechte sind, sich an die Aa von B und C, den Endpunkten gleicher Schenkel AB, AC, zwei gleiche BD, CE ziehen lassen, so dafs AD $>$AE sey?

Dieses ist nicht möglich, wenn die Winkel BAa, CAa gleich, oder wenn der BAa der gröfsere ist. Denn in beiden Fällen ist, da die beiden zusammen $>$2 rechte sind, der BAa $>$ ein rechter; daher BD $>$BE (§. 204, b.). Aber die BE ist $=$CE, wenn jene Winkel gleich sind (I, 4.); und $>$CE, wenn der BAa $>$CAa ist (I, 24.). Folglich ist ebenfalls oder noch viel mehr BD $>$CE, man mag den Punkt E auf der AD nehmen, wo man will.

Es sey nun aber der Winkel BAa der kleinere: so ist auch die BD $<$ CD (I, 24.); ferner ist der gröfsere Winkel CAa stumpf, und daher CD $>$CA: und jede von C an die AD gezogene ist $>$CA oder BA. Ist demnach die BD $\left.\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}$ BA: so läfst sich keine der BD gleiche von C an die AD ziehen. Ist aber die BD $>$BA; so läfst sich von C zwischen CD und CA eine der BD, welche $>$CA und $<$CD ist, gleiche CE ziehen (§. 209, 3)).

Bei Fall III. fragt sich: Wenn die gleichen BA, AC einen Winkel mit einander machen, innerhalb dessen die Aa liegt: ob und unter welchen Bedingungen von B und C an die Aa zwei gleiche BD, CE gehen

können, so dafs AD > AE sey? und zwar, wenn man die BC zieht, entweder

1) (*Fig.* 145. c.) so dafs der Punkt D auf die BC, der E aber oberhalb derselben falle? Dieses ist nicht möglich, wenn der Winkel BAa dem CBa gleich oder kleiner ist: denn in beiden Fällen wird jede von C an irgend einen Punkt E der AD gezogene CE > BD seyn. Im einen Fall ist nämlich CE = BE (I, 4.), und die Winkel bei D rechte; also BE > BD (§. 193, 3.); daher auch CE > BD. Im andern Fall ist CE > BE (I, 24.); und der Winkel BDA stumpf (§. 178. oder 252, 2.); also BE > BD (§. 193, 3.): daher noch mehr CE > BD.

Ist aber der Winkel BAa > CAa: so ist DB > DC und Winkel ADC stumpf (§. 252, 2.); daher CA > CD; und jede von C an die AD gehende ist > CD und < CA. Ist demnach die DB $\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\}$ BA oder AC: so läfst sich keine der BD gleich von C an die AD ziehen. Ist aber die BD < BA oder AC; da sie überdiefs > CD ist (I, 24.): so läfst sich eine ihr gleiche zwischen CA und CD ziehen (§. 209, 3));

2) oder so, dafs der Punkt E auf die BC, der D unterhalb BC falle.

(*Fig.* 145, d.) Dieses ist wiederum unmöglich, wenn der Winkel BAa dem CAa gleich, oder gröfser ist: denn in diesen Fällen wird jede von B an irgend einen Punkt D der verlängerten AE gezogene gerade BD > CE seyn. Denn im ersten Fall ist BE = EC, und bei E rechte; daher BD > BE und mithin > CE. Im andern Fall ist BE > EC, und Winkel BEA spitzig (§. 252, 2)); daher BED stumpf; und BD > BE, also noch viel mehr BD > CE.

Ist der Winkel CAa > BAa: so ist CE > BE, und Winkel CEA spitzig (§. 252, 2)); daher auch der Winkel BEa spitzig: und daher läfst sich (§. 209, 2)) von B an die Ea eine der CE, welche > BE ist, gleiche BD ziehen;

3) (*Fig.* 145. e) oder so, dafs beide Punkte D, E oberhalb der BC fallen. — Dieses ist wiederum unmöglich, wenn der Winkel BAa dem CAa gleich oder kleiner ist. Denn in beiden Fällen ist Winkel BDA stumpf (weil, wenn die AD der BC in G verlängert begegnet, der Winkel BGA im einen Fall ein rechter (I, 4.), im andern ein stumpfer ist (§. 252, 2)); daher BE > BD.

Aber die CE ist im einen Fall $=BE$ (I, 4.), im andern $>BE$ (I, 24.): Folglich ist $CE>BD$.

Ist aber Winkel $BAa>CAa$: so ist (I, 24.) $BD>CD$, und Winkel CGA stumpf (§. 252, 2.); und folglich jede von C an die AD gehende $<CA$ (§. 204, b.). Ist demnach die $BD>BA$ oder CA, wobei alsdann auch $BG>BA$ seyn wird (§. 202.): so läfst sich keine der BD gleiche von C an die AD ziehen. Ist aber $BD<BA$, welches immer Statt hat, wenn $BG \gtreqless BA$ (§. 201. 202.): so wird sich von C zwischen der CA, welche $>BD$, und der CD, welche $<BD$, eine der BD gleiche CE von C an die AD ziehen lassen (§. 209, 3.);

4) (*Fig.* 145, f.) oder so, dafs beide Punkte D, E unterhalb der BC fallen. Dieses ist wiederum unmöglich, wenn der Winkel BAa dem CAa gleich oder gröfser ist: denn in diesen Fällen wird die BD gröfser als jede von C an die GD gezogene seyn. Denn im einen Fall ist der Winkel BGD ein rechter, im andern stumpf (nämlich der BGA spitzig, nach §. 252, 2.); folglich $BD>BE$ (§. 204, b.): aber auch $BE \gtreqless EC$; folglich $BD>EC$.

Ist aber Winkel $BAa<CAa$: so ist $BD<CD$, und Winkel CGD stumpf (§. 252, 2.); daher jede von C an die GD gezogene gröfser als die CG. Ist also die $BD \gtreqless CG$: so läfst sich keine der BD gleiche von C an die GD ziehen. Ist aber $BD>CG$: so läfst sich von C zwischen der CD, die gröfser, und der CG, die kleiner als die BD ist, eine der BD gleiche an die GD ziehen (§. 209, 2));

5) (*Fig.* 145, g.) oder so, dafs D unterhalb, E oberhalb der BC falle. Wenn die Aa den Winkel BAC halbirt: da alsdann die Winkel bei G rechte, und jede von C an die AG gezogene $<CA$ oder BA ist (§. 199, b.); so läfst sich, wenn die $BD \gtreqless BA$ ist, keine der BD gleiche von C an die AG ziehen. Ist aber die $BD<BA$: so läfst sich Eine ziehen (§. 209, 2)), indem die BD immer $>BG$ oder CG ist.

Wenn der Winkel $BAa>CAa$ ist: so ist (§. 252, 2.) der Winkel CGA stumpf; daher jede von C an die AG gezogene $<CA$ oder BA; auch $BD>BG$. Folglich wenn die BD der BA gleich oder gröfser ist (welches

letztere nothwendig Statt hat, wenn GB $\overset{=}{>}$ BA ist): so läfst sich keine der BD gleiche von C an die AG ziehen. Ist aber BD < BA (wobei auch BG < BA seyn wird (§. 202.)): so läfst sich zwischen der CA, welche > BD, und der CG, welche < BG (I, 24.) < BD ist, Eine der BD gleiche an die AG ziehen (§. 209, 2)).

Ist der Winkel CAa der gröfsere von den beiden Theilen des Winkels BAC: so ist er entweder nicht kleiner als ein rechter oder kleiner. Ist er nicht kleiner als ein rechter: so ist jede von C an die AG gezogene > CA und < CG (§. 204. b.). Demnach läfst sich keine der BD gleiche von C an die AG ziehen, wenn die BD nicht > CA und nicht < CG ist. Ist sie aber > CA und < CG: so läfst sich eine ziehen (§. 209, 2)).

Ist aber der Winkel CAa kleiner als ein rechter: so fälle man von C auf die AG ein Perpendikel, welches innerhalb des Dreiecks CGA fallen wird (§. 177, 2.), weil der Winkel CGA ebenfalls spitzig ist (§. 252, 2.): es sey CH. So ist die CH die kleinste, die sich von C auf die Aa ziehen läfst (§. 199.). Wenn demnach die BD < CH ist: so läfst sich von C keine der BD gleiche an die AG ziehen. Ist sie = CH: so ist die CH selber die einzige, die sich ziehen läfst. Ist sie > CH, aber < jede der beiden CA und CG: so lassen sich zwei ziehen (§. 209, 2)). Ist sie $\overset{=}{>}\}$ die kleinere der beiden CA, CG, und < die gröfsere derselben: so läfst sich blofs Eine ziehen. Ist sie $\overset{=}{>}\}$ gröfsere von beiden: so läfst sich keine ziehen.

§. 260. Zusätze zu Satz 25. 1. „Wenn die Schenkel zweier gleichschenklichten Dreiecke gleich, ihre Grundlinien aber ungleich sind: so sind ihre Winkel an den Spitzen sowohl, als ihre Winkel an den Grundlinien ungleich; und zwar ist in demjenigen, dessen Grundlinie die gröfsere ist, auch der Winkel an der Spitze gröfser; seine Winkel an der Grundlinie aber sind kleiner als die an der Grundlinie des andern." — Dieses folgt aus S. 25. in Verbindung mit dem, was §. 243. nach dem ersten Beweis ausgesagt worden ist.

2. „Wenn in zwei ungleichschenklichten Dreiecken die Schenkel zwei und zwei gleich, aber ihre Grundlinien oder dritte Seiten ungleich sind: so sind ihre Winkel an den Spitzen sowohl, als die ihren gröfsern

Schenkeln gegenüberliegenden Winkel an den Grundlinien ungleich; und zwar ist in demjenigen Dreiecke, dessen dritte Seite die gröfsere ist, der Winkel an der Spitze gröfser; sein Gegenwinkel des gröfsern Schenkels aber kleiner, als der gleichnamige in dem andern Dreiecke." — Folgt wiederum aus S. 24. verbunden mit dem, was in §. 244. nach dem erstern der dortigen Beweise ausgesagt worden ist.

§. 261. Folgerungen aus Satz 25.

1. „Wenn in einem ungleichschenklichten Dreiecke eine gerade Linie von der Spitze an den Halbirungspunkt der Grundlinie gezogen wird: so macht sie mit ihr schiefe Winkel; und der an der Seite des gröfsern Schenkels liegende ist stumpf." — Dieses ist in §. 256. vgl. §. 257. auf andere Art erwiesen worden.

2. „Wenn in einem gleichschenklichten Dreiecke die Grundlinie durch eine von der Spitze an sie gezogene gerade Linie ungleich getheilt wird: so wird auch der Winkel an der Spitze durch dieselbe ungleich getheilt; und der gröfsere Theil desselben ist derjenige, der mit dem gröfsern Abschnitt der Grundlinie an einerlei Seite der theilenden liegt."

3. „Wenn in einem Viereck zwei an einander liegende Seiten gleich, die zwei übrigen einander ungleich sind: so wird der Winkel, welchen die gleichen Seiten einschliefsen, durch die dadurch gehende Diagonale ungleich getheilt; und der gröfsere Theil desselben liegt an derjenigen Seite der Diagonale, an welcher die gröfsere der ungleichen Seiten liegt.

4. (*Fig.* 146, b.) „Wenn in einem ungleichschenklichten Dreieck ABC das von der Spitze A auf die Grundlinie BC gefällte Perpendikel AD innerhalb des Dreiecks fällt: so theilt es die Grundlinie BC in ungleiche Theile, so dafs der gröfsere Theil BD an der gröfseren Seite AB liegt." — Denn man halbire die Grundlinie BC; so wird ihr Halbirungspunkt zwischen B und D fallen. Denn wäre dieses nicht: so fiele er entweder auf den Punkt D, oder zwischen D und C. Er kann aber nicht auf den Punkt D fallen: sonst wäre der Winkel ADB, den die AD mit der Grundlinie an der Seite des gröfsern Schenkels macht, ein stumpfer (nr. 1.): das ist er aber nicht. Auch kann der Halbirungspunkt nicht zwischen D und C fallen; wie auf E: sonst wäre, wenn man AE zieht, der Winkel AEB ein stumpfer (nr. 1.): und mithin die Winkel ADE, AED zusammen >2 rechte; wel-

ches unmöglich ist (I, 17.). Mithin fällt der Halbirungspunkt der BC zwischen B und D: er falle auf F. Da nun die BF=FC also >DC ist: so ist noch viel mehr die BD>DC: w. z. e. w. — Dieses ist auf andere Art in §. 203. gefolgert worden.

Satz XXVI.

§. 262. Hat zwei Theile, welche zwei Sätze enthalten, die sich abgesondert so ausdrücken lassen:

1. „Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel zweien Winkeln, je einen einem, gleich haben, und auch eine Seite einer Seite gleich haben, die an den gleichen Winkeln (προς ταις ισαις γωνιαις; man könnte auch sagen: zwischen den gleichen Winkeln) liegt: so werden sie auch die übrigen Seiten den übrigen, je eine einer, gleich haben, diejenige nämlich, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen; und den übrigen Winkel dem übrigen gleich haben."

2. „Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel zweien Winkeln, je einen einem, gleich haben, und eine Seite einer Seite gleich, die einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: so werden sie auch die übrigen Seiten den übrigen, je eine einer, gleich haben; nämlich sowohl diejenige, welche an den gleichen Winkeln liegt, als diejenige, welche dem übrigen der gleichen Winkel gegenüber liegt; und den dritten Winkel dem dritten gleich haben."

Euklid fafst diese beiden Sätze in einen zusammen, dessen Bedingung dem einen Theile nach gemeinschaftlich, dem andern Theile nach sich in zwei disjunctive Glieder in Absicht auf die Lage der gleichen Seiten theilt; die Folge aber heifst: „sie werden die übrigen Seiten den übrigen, je eine einer, gleich haben," ohne die genauere Bestimmung hinzuzusetzen: welche welchen?; weil diese Bestimmung, welche so lauten würde: „nämlich im ersten Fall diejenigen, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen; im andern Fall sowohl diejenige, die an den gleichen Winkeln liegt, als diejenige, die den gleichen Winkeln gegenüberliegt;" und so die Aussage des Satzes merklich weitläufiger machen würde; an dieser Stelle, nachdem der vierte Satz mit seiner in Absicht auf die die Winkel betreffenden Folge genau bestimmten Aussage schon oftmals angewendet worden, und als hinlänglich bekannt und geläufig vorausgesezt werden darf, als leicht hinzuzudenken, wohl entbehrt

werden konnte. Der erste der beiden abgesonderten Sätze hätte sich allerdings, wie oben bemerkt worden (§. 46.), lange vor dem zweiten beweisen lassen, nämlich gleich nach I, 4., von welchem er unmittelbar abhängt; statt dafs der zweite I, 16. voraussezt: aber da jener zu keinem der vor I, 26. vorausgehenden Sätze gebraucht wird (er wird zum erstenmal in I, 34., sodenn in IV, 13. XI, 4. gebraucht; der andere in III, 3. IV, 4. 13. XI, 34.; beide in XI, 35.): so war die Absonderung wenigstens nicht nöthig. Das Zusammenfassen aber zweier in Bedingung und Folge dem gröfsten Theile nach übereinkommenden Sätze in einen einzigen mit zwei Fällen, hat für das Behalten und für die Anwendung einigen Vortheil vor der Aufstellung zweier getrennten Sätze, welche in ihren Aussagen beide noch eine ziemliche Ausdehnung hätten, und doch in diesen Aussagen nur wenig von einander unterschieden wären.

§. 263. Die Nebenbestimmung (προσδιορισμος, wie es Proclus heifst) der dritten Bedingung in der Aussage des Satzes ist so zu verstehen: „sie mag nun in den beiden Dreiecken an den gleichen Winkeln liegen, oder in beiden einem oder gleichen Winkel gegenüberliegen; nicht aber so: „sie mag in dem einen Dreiecke an den gleichen Winkeln, und in dem andern einem der gleichen Winkel gegenüber liegen." Denn mit dieser Bestimmung wäre der Satz falsch.

Es können nämlich zwei Dreiecke zwei Winkel zweien Winkeln, je einen einem, gleich, und eine Seite einer Seite gleich haben, und doch im übrigen ungleich seyn; wenn nämlich diese Seite in dem einen Dreieck an den gleichen Winkeln, in dem andern einem der gleichen Winkel gegenüber liegt. (*Fig.* 147.) Denn es sey irgend ein ungleichseitiges Dreieck ABC, dessen Seite AC die gröfste, AB die kleinste sey: so ist (I, 18.) der Winkel ABC>C. Man lege an AB in B (I, 23.) den Winkel ABD=C: so haben die zwei Dreiecke ABC, ABD die Winkel BAC, ACB den Winkel DAB, ABD gleich, und die Seite AB gemeinschaftlich, welche in dem ersten einem der genannten Winkel C gegenüber, in dem andern zwischen den genannten Winkeln liegt. Alsdann ist zwar der übrige Winkel ABC dem übrigen ADB gleich (I, 32.): aber die BC, BD, welche dem gemeinschaftlichen Winkel bei A gegenüber liegen, sind ungleich; denn da der Winkel ABC>A (I, 18. weil AC>BC): so ist auch Winkel ADB>BAD, und daher

AB>BD (I, 19.), und noch mehr BC>BD. Ferner sind die den gleichen Winkeln ABC, ADB gegenüberliegenden Seiten AC, AB ungleich; auch die den gleichen Winkeln C, ABD gegenüberliegenden AB, AD ungleich; nämlich AB>AD, weil Winkel ADB (=ABC) >C d. i. >ABD ist.

§. 264. Aus der Gleichheit zweier Winkel und entweder der Zwischenseiten derselben oder der Gegenseite eines derselben, sagt also der 26ste Satz, folge die Gleichheit des übrigen in zwei Dreiecken.

Anderer Ausdruck des ersten Theils. „Wenn zwei Dreiecke die Grundlinie und die zwei Winkel an der Grundlinie gleich haben: so haben sie auch die zwei Seiten und den Winkel an der Spitze gleich."

„Wenn zwei Dreiecke den Winkel an der Spitze, eine Seite und den daran liegenden Winkel an der Grundlinie gleich haben: so haben sie auch die Grundlinie und die übrige Seite, wie auch den übrigen Winkel an der Grundlinie gleich."

Ferner ohne das Wort Dreiecke:

Wenn an zwei einander gleiche gerade Linien in ihren Endpunkten andere gerade Linien unter paarweise gleichen Winkeln gezogen werden und zusammentreffen: so sind die durch den Punkt ihres Zusammentreffens begränzten Stücke derselben zwei und zwei gleich, und die Winkel, unter denen sie zusammentreffen, sind auch gleich.

Wenn zwei zwischen den Schenkeln jedes von zwei Winkeln gezogene gerade Linien einander gleich sind, und mit den Schenkeln paarweise gleiche Winkel machen: so sind die ersten Winkel gleich, und die von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke sind auch paarweise gleich.

Wenn aus zwei Punkten an zwei gerade Linien, je zwei gerade Linien unter paarweise gleichen Winkeln gezogen werden, und von den erstern gleiche Stücke abschneiden: so sind die von den beiden Punkten aus gezogenen paarweise gleich, und schliefsen gleiche Winkel ein.

Anderer Ausdruck des zweiten Theils. „Wenn zwei Dreiecke die zwei Winkel an der Grundlinie und eine Seite gleich haben: so haben sie auch die Grundlinie und die andere Seite gleich."

„Wenn zwei Dreiecke die Grundlinie und einen der anliegenden Winkel, und auch den Winkel an der

Spitze gleich haben: so haben sie auch die Seiten gleich, sowohl diejenige, die dem genannten Winkel an der Grundlinie gegenüberliegt, als die übrige; und haben auch den übrigen Winkel an der Grundlinie gleich.

Wenn in zwei gleichen Winkeln aus den Endpunkten gleicher abgeschnittener Schenkel gerade Linien an die übrigen Schenkel unter gleichen Winkeln mit den letztern gezogen werden: so sind die gezogenen geraden Linien einander gleich, schneiden von den andern Schenkeln gleiche Stücke ab, und machen auch mit den ersten Schenkeln gleiche Winkel.

Wenn zwischen den Schenkeln zweier gleichen Winkel gezogene gerade Linien einander gleich sind, und je mit einem der Schenkel gleiche Winkel einschliefsen: so schliefsen sie auch auch mit den übrigen Schenkeln gleiche Winkel ein, und schneiden von beiden Paaren Schenkel zwei und zwei gleiche Stücke ab.

Wenn an jede von zwei gleichen geraden Linien aus einem Endpunkt derselben gerade Linien unter gleichen Winkeln gezogen, und an diese gezogene aus den andern Endpunkten andere gerade Linien unter gleichen Winkeln, die sie mit den ersten gezogenen machen, gezogen werden: so werden die aus den ersten und aus den andern Endpunkten gezogenen geraden Linien bis, wo sie zusammentreffen, einander, zwei und zwei, gleich seyn; und die Winkel, welche die ersten und die zweiten gezogenen mit einander einschliefsen, werden auch gleich seyn.

Wenn aus zwei Punkten je zwei gerade Linien an eine dritte unter gleichen Winkeln gezogen werden; und die eine gezogene der einen gleich ist: so ist auch die andere der andern gleich; und die Stücke, die sie von der dritten abschneiden, sind einander gleich; auch schliefsen beide Paare der gezogenen gleiche Winkel mit einander ein.

§. 265. Beweis des ersten Theils anders, durch Congruenz unmittelbar ohne 1, 4. — (Fig. zu I, 26. in d. Uebers. u. Fig. 148.) Man bringe das Dreieck DEF auf das Dreieck ABC, und lege den Punkt E auf B, und die EF auf die BC: so fällt auch F auf C. Und da der Winkel FED dem Winkel CBA gleich ist: so fällt auch die ED auf die BA; und daher wird auch der Punkt D, der auf der ED liegt, auf die BA fallen. Und nun kann man weiter entweder so schliefsen:

a) Ebenso wird bewiesen, dafs auch der Punkt D auf die CA fallen werde. Da er demnach sowohl auf

die BA als auf die CA fällt: so muſs er auf einen Punkt fallen, den die BA, CA gemeinschaftlich haben. Fiele er also auf einen andern Punkt als A: so würden die BA, AC einen andern Punkt als A gemeinschaftlich haben. Sie haben aber auch den Punkt A gemeinschaftlich. Folglich hätten die zwei geraden Linien BA, AC mehr als einen Punkt gemein; welches nicht möglich ist. (Ax. zweite Klasse. Anm. oben.)

b) Oder so: Fiele der Punkt D nicht auf den Punkt A der BA, da er doch in die Richtung der BA fallen muſs: so müſste er entweder auf einen zwischen B und A liegenden Punkt oder auf einen Punkt ihrer Verlängerung fallen; es sey der Punkt G: und man ziehe die GC: so weicht diese in ihrer ganzen Ausdehnung von der CA ab. Die FD aber wird entweder ganz mit CG zusammenfallen; oder sie wird anfangs, z. B. bis J, in der Richtung der CA sich erstrecken, und denn von derselben abweichen und sich nach G hinziehen. Ersteres ist aber unmöglich, weil der Winkel EFD den Winkel BCG decken würde, und also ihm gleich wäre; folglich kleiner oder gröſser wäre als der Winkel ACB (je nachdem G unterhalb oder oberhalb A fällt); da er ihm doch gleich ist (Vorauss.). Letzteres ist ebenfalls unmöglich; weil sonst zwei gerade Linien CG, CJG einen Raum einschlöſsen; oder weil zwei gerade Linien CJG, CJA einen Abschnitt CJ gemeinschaftlich hätten; welches beides nicht möglich ist. Folglich kann der Punkt F nicht anders als auf A fallen: woraus das übrige folgt.

§. 266. Beweis des zweiten Theils nach dem Texte durch I, 16., mit etwas anderer Wendung. — (Fig. zu I, 26. in der Uebers.) a) „Wenn zwei Dreiecke ABC, DEF einen Winkel B einem Winkel E gleich haben, und von den ihn einschlieſsenden Seiten die eine AB der einen DE gleich, die andere BC aber der andern EF ungleich haben: so haben sie auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ACB, DFE ungleich; und dasjenige hat den kleinern Winkel, das die andere Seite gröſser hat;" d. i. Winkel ACB$<$DFE, wenn BC$>$EF. — Denn man schneide von der gröſsern BC die BH der kleinern EF gleich ab, und ziehe AH: so ist (I, 4.) Winkel AHB$=$DFE. Aber (I, 16.) Winkel AHB$>$ACB. Folglich auch Winkel DFE$>$ACB.

b) Hieraus folgt nun: Wenn zwei Dreiecke ABC, DEF einen Winkel ABC einem Winkel DEF, und von den einschlieſsenden Seiten die eine AB der einen DE

gleich haben, und auch den Gegenwinkel ACB, DFE gleich haben: so haben sie auch die andere der einschliefsenden Seiten der andern, die BC der EF gleich. Denn wären die BC, EF ungleich: so wären (nach a) auch die Winkel ACB, EFD ungleich; die doch gleich sind. Mithin sind die BC, EF gleich; woraus das übrige verm. I, 4.

§. 267. Frage: Läfst sich nicht auch der Satz I, 4. verallgemeinern, und ohne Beschränkung des Winkels auf den Zwischenwinkel zwischen den zwei und zwei gleichen Seiten, analog mit I, 26. sagen: „Wenn zwei Dreiecke zwei und zwei Seiten, je eine einer, gleich haben, und auch einen Winkel einem Winkel gleich; es mag nun dieser von den gleichen Seiten eingeschlossen seyn, oder einer derselben gegenüberliegen: so werden sie auch die Grundlinie der Grundlinie gleich haben," u. s. w.? Zur Erörterung dieser Frage dienen folgende Sätze:

Satz A. (*Fig.* 149.) „Zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, DEF, deren Schenkel AB, DE, und ein Winkel an der Grundlinie ABC, DEF gleich sind, sind durchaus gleich."

Bew. 1. Denn da Winkel ABC=ACB, und DEF =DFE (I, 5.) aber auch ABC=DEF (Vorauss.): so haben diese Dreiecke die zwei Winkel B. C den zweien Winkeln E, F, je einen einem, gleich, und die Seite AB der Seite DE gleich, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt. Folglich ist auch (I, 26. 2 Thl.) die BC der EF gleich, und Winkel A=D; d. h. ihre Grundlinien und ihre Winkel an den Spitzen sind gleich.

2. Oder man bringe das Dreieck ABC über das Dreieck DEF, und lege den Punkt B auf E, und die BA auf die ED: so wird auch A auf D fallen, weil die BA, ED gleich sind; und die BC wird auf die EF fallen, weil die Winkel B, E gleich sind. Nun wird aber auch der Punkt C auf F fallen: denn fiele er auf einen Punkt der EF diesseits oder jenseits F, wie auf G; und also AC auf DG: so wäre, da AC=AB, auch DG=DE und mithin (Vorauss.) =DF. Demnach giengen von einem Punkt D an eine gerade Linie EF drei gleiche gerade Linien DE, DF, DG: welches nicht möglich ist (§. 201.). Also ist unmöglich, dafs der Punkt C nicht auf F falle: er fällt also auf F, und die zwei Dreiecke decken sich.

3. Oder man fälle von A auf BC auf BC das Perpendikel AH, welches innerhalb des Dreiecks ABC fallen wird (§. 177, 2.). Da nun die Winkel an der Grundlinie gleich, und die Winkel bei H rechte sind: so haben die Dreiecke ABH, ACH die zwei Winkel ABH, AHB den zweien Winkeln ACH, AHC gleich; sie haben aber auch die Seite AH gemeinschaftlich, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: Folglich ist auch (I, 26. Thl. 2.) die BH der HC gleich, oder die BC ist in H halbirt. Und ebenso wird auch die EF durch das auf sie von D gefällte Perpendikel DJ halbirt werden. Und nun, da der Winkel B dem Winkel E gleich, und die Winkel bei H und J rechte sind: so haben die Dreiecke ABH, DEJ die Winkel ABH, AHB den zweien Winkeln DEJ, DJE gleich; aber auch die Seite AB der DE, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: folglich ist auch die BH der EJ gleich; daher auch ihre Doppelte, d. i. die BC der EF gleich.

Anm. In diesem Beweis ist zugleich dargethan: „In einem gleichschenklichten Dreiecke wird die Grundlinie durch das aus der Spitze auf sie gefällte Perpendikel halbirt." Vergl. den Beweis des 2ten Theils von III, 3. Zugleich folgt ferner, dafs „auch der Winkel an der Spitze und das Dreieck durch sie halbirt sey."

Satz B. (*Fig.* 150, b.) „Wenn in zwei Dreiecken ABC, DEF zwei, übrigens unter sich ungleiche, Seiten AB, AC des einen zweien DE, DF des andern, und die dem Paare der gröfsern Seiten AB, DE gegenüberliegenden Winkel ACB, DFE gleich sind: so sind die Dreiecke durchaus gleich."

Bew. 1. Wären die Grundlinien BC, EF ungleich: so ist eine von ihnen, BC, gröfser als die andere EF: man schneide von der gröfsern BC vom Endpunkt C der kleinern Seite an ein der kleinern EF gleiches Stück CG ab, und ziehe AG. Da nun die AC, CG den DF, FE, und Winkel ACG dem DFE gleich sind: so ist (I, 4.) die AG der DE, und mithin der AB gleich: demnach das Dreieck ABG gleichschenklicht, und sein Aussenwinkel AGC an der Grundlinie stumpf (§. 175.). Er ist aber auch spitzig, weil er in dem Dreieck AGC der kleinern Seite AC gegenüberliegt (§. 174.); denn die AC ist $<$ AB, also auch $<$ AG. Dieses ist aber unmöglich: demnach können die AC, EF nicht ungleich seyn; also sind sie gleich: daher auch das übrige gleich, nach I, 4.

Bew. 2. Da die AB $>$ AC; so läfst sich (§. 209, 3.) von A an die verlängerte BC eine der AB gleiche zie-

hen; sie sey AK. Man verlängere EF, und mache die FL=CK, ziehe DL. Da nun Winkel ACB=DFE; so ist auch Winkel ACK=DFL (I, 13.) aber auch die AC, CK den DF, FL gleich; daher (I, 4.) AK=DL: folglich auch die AB, und mithin die DE=DL: auch ist Winkel AKC=DLH. Nun sind (I, 5.) Winkel AKC=ABC, DLE=DEF: folglich auch Winkel ABC=DEF. Und (nach I, 26. 2n Thl.) BC=EF.

Zus. 1. (*Fig.* 150, b.) Zwei rechtwinklichte Dreiecke ABC. DEF, deren Hypotenusen AB, DE und eine Seite um den rechten Winkel AC, DF gleich sind, sind durchaus gleich.

Bew. 1. Da in jedem rechtwinklichten Dreieck die Gegenseite des rechten Winkels gröfser ist als jede der andern (§. 198, 3)): so ist die AB>AC, und DE>DF. Da demnach die unter sich ungleichen Seiten AB, AC den Seiten DE, DF gleich sind, und auch die Winkel C, F gleich als rechte, welche den gröfsern Seiten gegenüberliegen: so ist (Satz B) die BC der EF gleich; und hieraus das übrige.

Bew. 2. Wären die BC, EF ungleich: so ist eine die gröfsere; es sey die BC; und man schneide die CG=EF ab; so ist (I, 4.) auch die AG der DE gleich. Der DE ist aber auch die AG gleich. Folglich sind die AG, AB gleich: das heifst, die dem Perpendikel AC nähere AG gleich der entfernteren AB: welches nicht möglich ist (§. 199.). Folglich sind die BC, EF nicht ungleich; also gleich.

Bew. 3. Man verlängere die BC nach H, und nehme die CH=EF; ziehe AH. So ist (I, 4.) die AH=DE, und also auch =AB; daher Winkel B=H. Die Winkel bei C aber sind rechte. Da nun die zwei Winkel B, BCA den zweien H, HCA gleich sind, und die CA gemeinschaftlich ist, die einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: so ist auch (I, 26.) die BC=CH d. i. (Constr.) =EF.

Zus. 2. (*Fig.* 150, c.) „Zwei stumpfwinklichte Dreiecke ABC, DEF, deren stumpfe Winkel ACB, DFE, derselben Gegenseiten AB, DE, und eine Seite um den stumpfen Winkel AC, DF gleich sind, sind durchaus gleich."

Bew. 1. Denn in den stumpfwinklichten Dreiecken ist die Gegenseite des stumpfen Winkels gröfser als jede der andern (§. 198, 3.); und daher auch das übrige wie in Zus. 1. Bew. 1.

Bew. 2. Oder wären BC, EF ungleich: so mache man die Construction wie bei Zus. 1. Bew. 2.: so werden AG, AB gleich seyn; das ist, die der den stumpfen

Winkel machenden AC nähere AG der entfernteren AB gleich; welches nicht möglich ist (§. 204, b.) u. s. w.

Bew. 3. Man verlängere die BC und ziehe an sie von A die der AC gleiche AH (§. 209, 2.), welches immer möglich ist, weil der Winkel BCA stumpf, also ACH spitzig ist; nehme HJ=EF, und ziehe AJ. So sind die Winkel bei H= denen bei C (I, 5.); daher (I, 4.) AJ=AB, und Winkel J=E. Dann ist aber auch (I, 5.) Winkel B=J. Folglich auch Winkel B=E: daher aus I, 26. das übrige folgt.

Zus. 3. (*Fig.* 150, a.) „Wenn in zwei Dreiecken ABC, DEF zwei Seiten AB, AC des einen zweien DE, DF des andern, und die dem Paar der gröfsern Seiten AB, DE gegenüberliegenden spitzigen Winkel ACB, DFE gleich sind; so sind die Dreiecke durchaus gleich."

Bew. 1. Dieses ist im Satz B. selber begriffen.

Bew. 2. Da die AB>AC: so ist Winkel ACB>B. Da nun der ACB spitzig ist: so ist auch der bei B spitzig, und daher fällt ein von A auf die Grundlinie BC gefälltes Perpendikel innerhalb des Dreiecks (§. 178.): es sey AH. Ebenso fälle man von D auf EF das Perpendikel DJ. Da nun die Winkel ACH, AHC den Winkeln DFJ, DJF gleich sind, und die Seite AC=DF, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: so ist (I, 26.) Thl. 2.) auch die AH=DJ, und die CH=FJ. Demnach haben die zwei rechtwinklichten Dreiecke ABH, DEJ die Hypotenusen AB, DE, und die einen Seiten um die rechten Winkel, AH, DJ gleich: folglich ist (nach Zus. 1. dieses Satzes B) auch die BH=EJ. Nun war auch HC=JF. Folglich ist auch die ganze BC der ganzen EF gleich.

Bew. 3. (*Fig.* 150, d.) Da die AB>AC, und Winkel C spitzig ist: so läfst sich (§. 209, 3)) von A eine der AC gleiche an die BC ziehen: sie sey AK. Ebenso ziehe man von D an die EF die der DF gleiche DL. Da nun die AC=DF: so ist auch AK=DL. Und da die Schenkel AC, DF, und die Winkel C, F an den Grundlinien der gleichschenklichten Dreiecke AKC, DLF gleich sind: so sind auch (Satz A.) die Grundlinien KC, LF gleich: ferner sind die Aufsenwinkel AKB, DLE gleich (I, 5. 13.); und sie sind stumpfe (§. 175.). Demnach sind in den stumpfwinklichten Dreiecken ABK, DEL die stumpfen Winkel AKB, DLE, deren Gegenseiten AB, DE, und die einen Seiten an den stumpfen Winkeln AK, DL gleich: folglich sind (Zus. 2.) auch die BK, EL gleich.

Nun war auch die HC=LF. Folglich ist auch die ganze BC der ganzen EF gleich.

Anm. (*Fig.* 143, b.) In Beziehung auf den nächstfolgenden Satz C. bemerken wir hier noch: „Wenn von der Spitze C eines gleichschenklichten Dreiecks CAB eine gerade Linie CD an die Grundlinie schief gezogen ist: so theilt sie die Grundlinie AB und den Winkel ACB an der Spitze in ungleiche Theile; und die gröfseren Theile liegen an der Seite des spitzigen Winkels unter den schiefen." — Denn man fälle das Perpendikel CE, welches auf die Seite des spitzigen Winkels ADC fallen, und die Grundlinie AB und den Winkel ACB halbiren wird (nach Anm. zu Satz A. dieses §.). Da demnach die AE=EB: so ist AD>DB. Und da Winkel ACE=BCE: so ist Winkel ACD>BCD.

Satz C. „In zwei Dreiecken können zwei unter sich ungleichen Seiten des einen zweien des andern, und die Gegenwinkel des Paars der kleinern gleichen Seiten gleich seyn, ohne dafs die Flächen, die dritten Seiten und die übrigen Winkel der Dreiecke gleich sind."

Beispiel 1. (*Fig.* 151, a.) Man nehme irgend ein gleichschenklichtes Dreieck ABC, und ziehe von dessen Spitze A an die Grundlinie BC eine gerade Linie, welche den Winkel an der Spitze, oder die Grundlinie ungleich theile, oder schief auf der Grundlinie stehe: davon immer das eine das andere zur Folge hat (I, 24. 25. Anm. zu Satz B.); ist nämlich Winkel BAD>DAC: so ist auch BD>DC, und Winkel BDA spitzig; und umgekehrt. Die AD aber ist kleiner als die AB (§. 201.). Es haben also die zwei Dreiecke ABD, ACD die unter sich ungleichen Seiten AB, AD den Seiten AC, AD gleich, und die Winkel ABD, ACD gleich, welches die Gegenwinkel der gemeinschaftlichen kleinern Seite AD sind: und doch sind die Dreiecke ungleich (§. 71.), ihre dritten Seiten BD, DC ungleich, und ihre übrigen Winkel BAD, CAD, wie auch BDA, CDA ungleich.

Beispiel 2. (*Fig.* 151, b.) Es sey wiederum irgend ein gleichschenklichtes Dreieck ABC: und man verlängere seine Grundlinie BC beliebig nach D, und ziehe die DA. So haben die Dreiecke ABD, ACD die (§. 201.) unter sich ungleichen Seiten AD, AB den Seiten AD, AC gleich, und den Winkel bei D, der dem Paar der kleinern gleichen Seiten AB, AC gegenüberliegt, gemeinschaftlich: und doch ist das Dreieck ABD gröfser als das Dreieck ACD, und die dritte Seite BD gröfser

als die CD, und von den übrigen Winkeln der BAD >CAD, und der ABD<ACD (I, 16.).

Satz D. (*Fig.* 152.) „Wenn in zwei Dreiecken ABC, DEF zwei unter sich ungleiche Seiten AB, AC des einen zweien DE, DF des andern, und die dem Paare der kleineren gleichen Seiten AB, DE gegenüber liegenden Winkel ACB, DFE gleich sind; und überdiefs die Gegenwinkel ABC, DEF des Paars der gröfsern gleichen Seiten beide stumpfe, oder beide spitzige Winkel, oder einer derselben ein rechter ist: so sind die Dreiecke durchaus gleich.

Bew. Wären die BC, EE ungleich: so ist eine die gröfsere, es sey die BC, und man schneide von ihr die CG=FE ab, und ziehe AG. So ist (I, 4.) die AG der DE, mithin auch der AB gleich; und Winkel AGC=DEF. Sind nun

Fall I. die Winkel ABC, DEF beide spitzig; so ist auch der dem DEF gleiche AGC spitzig: welches unmöglich ist (§. 175.), da er Aufsenwinkel an der Grundlinie des gemeinschaftlichen Dreiecks ABG ist.

Fall II. Sind die Winkel ABC, DEF beide stumpf: so ist in dem gleichschenklichten Dreieck ABG der Winkel ABG an der Grundlinie stumpf; welches nicht möglich ist (§, 175.).

Fall III. Ist der Winkel ABC ein rechter: so ist in dem gleichschenklichten Dreieck ABG der Winkel ABG an der Grundlinie ein rechter; welches nicht möglich ist (§. 175.).

Es ist also in allen diesen Fällen unmöglich, dafs die BC, EF ungleich seyen: also sind sie gleich; und hieraus das übrige.

§. 268. Anwendungen des Satzes 26.

a. „Wenn zwei rechtwinklichte Dreiecke einen der übrigen Winkel, und entweder die dem rechten, oder die dem andern Winkel gegenüberliegende Seite, oder die zwischen dem rechten und dem andern Winkel liegende Seite gleich haben: so haben sie auch die übrigen Seiten und Winkel gleich."

b. „Wenn in einem Viereck eine Diagonale mit jedem Paar Gegenseiten gleiche Winkel macht: so sind jede zwei Gegenseiten einander gleich, und jede zwei Gegenwinkel einander auch gleich." (Chrestom. geom. S. 372. 2. a). Vgl. den Beweis von I, 34.). — Folgt aus I, 26. Thl. 1.

c. „Wenn in einem Dreieck eine gerade Linie, die den Winkel an der Spitze halbirt, auf der Grundlinie senkrecht steht: so ist es gleichschenklicht; und seine Grundlinie ist durch dieselbe gerade Linie auch halbirt." — Ist im Beweis von IV, 13. enthalten: und folgt aus 1. Thl. von I, 26.

d. „Ein Perpendikel von der Spitze eines gleichschenklichten Dreiecks halbirt die Grundlinie, den Winkel an der Spitze und das Dreieck." — S. oben §. 267. Satz A. Bew. 3. Anm.

e. „Wenn in einem Viereck zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, und einer der übrigen Winkel durch die Diagonale halbirt wird: so sind sowohl die diesen letzteren, als die den übrigen Winkel einschliefsenden Seiten einander gleich, und der übrige Winkel ist durch die Diagonale auch halbirt." — Folgt aus I, 26. 2n Thl. Vgl. den Beweis von IV, 13. (Der Satz steht auch in Chrestom. geom. S. 327. nr. 12.).

f. „Wenn eine gerade Linie durch eine andere schneidende halbirt wird, und mit den von ihren Endpunkten an die Endpunkte der andern gezogenen geraden Linien gleiche Winkel macht: so halbirt sie auch die andere, und die letztgezogenen geraden Linien sind auch einander gleich." — Folgt aus I, 15. u. 26., 1n Thl. Vgl. den Beweis von XI, 4. in Betreff der geraden Linien AB, GH in der dortigen Figur.

g. (*Fig.* 153.) „Wenn durch den Halbirungspunkt D einer Seite AC eines Dreiecks ABC eine gerade Linie gezogen ist, welche einer der übrigen Seiten AB selbst in E, der dritten Seite BC aber auf ihrer Verlängerung CF in G begegnet: so ist ihr aufserhalb des Dreiecks liegender Theil DG gröfser als der innerhalb des Dreiecks liegende DE." — Folgt aus f., indem man, da Winkel DCG>A (I, 16.), den Winkel DCH=A macht (I, 23.).

§. 269. a. (*Fig.* 154.) „Wenn zwei gerade Linien ED, DF und der Winkel EDF, den sie einschliefsen, zweien Seiten BA, AC eines Dreiecks BAC und dem von diesen eingeschlossenen Winkel BAC gleich sind; und an den Endpunkt E einer der ersten, DE, eine gerade Linie EG unter einem Winkel DEG gezogen wird, der dem andern der ihr gleichen Seite AB anliegenden Winkel ABC des Dreiecks gleich ist: so wird die gezogene EG auf den Endpunkt F der andern DF treffen. — Denn träfe sie nicht darauf: so wird die von

F nach E gezogene gerade Linie von der EG abweichen; also der Winkel FED dem GED, und also auch (Vorauss.) dem ABC ungleich seyn: er ist ihm aber gleich vermöge der Bedingungen und I, 4. — Oder träfe die EG auf einen andern Punkt H der DF: so wäre (I, 26. 1. Thl.) die DH=AC. Aber auch DF=AC (Vorauss.). Folglich DF=DH; welches unmöglich ist.

b. „Wenn zwei gerade Linien ED, DF u. s. w. (wie vorhin) — — — gleich sind; und von dem Endpunkt E einer der ersten DE an die andere DF eine gerade Linie zu ziehen ist, die mit ihr einen dem ACB gleichen Winkel mache: so trifft die zu ziehende auf den Punkt F." — Denn träfe sie anders wohin, wie auf H: so wäre, da die zwei Winkel D, DHE den zweien A, ACB gleich sind, und die DE der AB gleich ist, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegen, nach I, 26. auch die DH der AC gleich. Aber es ist die DF der AC gleich (Vorauss.). Folglich DH=DF; welches unmöglich ist. Folglich kann die zu ziehende auf keinen Punkt zwischen D und F treffen. Und ebenso läfst sich zeigen, dafs sie auch nicht auf die verlängerte DF treffe. Folglich trifft sie auf den Punkt F.

c. „Wenn eine gerade Linie DE und zwei an ihr in ihren Endpunkten D, E und an einerlei Seite derselben anliegende Winkel EDH, DEG einer Seite AB und den anliegenden Winkeln BAC, ABC eines Dreiecks gleich sind: so treffen deren Schenkel DH, EG zusammen, und sie sind ihr ihrer Ausdehnung bis dahin, wo sie zusammentreffen, den übrigen Seiten AC, BC des Dreiecks, je eine einer, gleich." — Denn man nehme auf dem Schenkel DH die DF=AC: so wird die EG auf F treffen (nach a. dieses §.), und (I, 4.) die EF=BC seyn.

d. (*Fig.* 155, a.) „Wenn von den Schenkeln eines Winkels BAC gleiche Stücke AB, AC abgeschnitten sind, und an diese in ihrem Endpunkte B, C gerade Linien BD, CE unter gleichen Winkeln ABD, ACE gezogen sind, deren eine BD mit der den Winkel halbirenden geraden Linie AF zusammentrifft: so trifft auch die andere CE mit dieser halbirenden in dem nämlichen Punkt D zusammen." Bew. wie in a.

e. (*Fig.* 155, b.) „Wenn aus dem Endpunkt D der einen Winkel BAC halbirenden geraden Linie AD zwei gerade Linien DB, DE an verschiedenen Seiten derselben und unter gleichen Winkeln ADB, ADE gezogen werden, und eine derselben DB auf den Endpunkt B

eines der gleichen Schenkel AB, AC des Winkels trifft: so trifft die andere DE auf den Endpunkt C des andern. — Bew. wie in a.

f. (*Fig.* 155, b.) „Wenn eine durch die Spitzen A, D zweier Winkel BAC, BDE gehende gerade Linie AD die beiden Winkel halbirt, und ein Schenkel AB des einen mit einem Schenkel DB des andern, der an der nämlichen Seite liegt, zusammentrifft, wie in B: so trifft auch der andere Schenkel AC mit dem andern Schenkel DE zusammen: und ihre Längen, bis wo sie zusammentreffen, sind den Längen der erstern bis zum Punkte B ihres Zusammentreffens gleich. — Bew. wie in c.

g. (*Fig.* 156.) „Wenn an eine gerade Linie AB in ihren zwei Endpunkten A, B und an verschiedenen Seiten von ihr zwei gleiche gerade Linien AC, BD und unter gleichen Winkeln BAC, ABD gezogen sind: so wird eine von dem Endpunkt C der einen von diesen an den Halbirungspunkt E der ersten gezogene gerade Linie CE verlängert auf den Endpunkt D der andern gezogenen treffen. — Bew. durch I, 15. wie in a.

h. (*Fig.* 156.) „Wenn zwei gerade Linien AB, CD einander halbiren, und von dem einen Endpunkt A der einen AB an den einen Endpunkt C der andern CD eine gerade Linie gezogen ist; und dem Winkel BAC, welchen die erste AB mit dieser gezogenen macht, ein gleicher Winkel ABF in ihrem andern Endpunkt B an sie angelegt wird: so wird dessen Schenkel BF auf den andern Endpunkt D der andern CD treffen.

§. 270. a. (*Fig.* 157.) „Wenn eine gerade Linie AD einen Winkel BAC halbirt; so sind die von jedem Punkte derselben, E, auf die Schenkel des Winkels gefällten zwei Perpendikel EF, EG einander gleich": oder „es ist jeder Punkt derselben von beiden Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt." — Folgt aus I, 26. 2n Thl. Es ist aber offenbar, dafs die Perpendikel die Schenkel AB, AC selber treffen, und nicht über A hinaus auf die andere Seite, noch auf A fallen können (§. 176, b.), weil jeder der Winkel BAD, CAD, als die Hälfte des BAC, spitzig ist (§. 110, b.).

b. „Wenn aber irgend ein Punkt H aufserhalb der den Winkel halbirenden geraden Linie AD angenommen wird: so sind die von demselben auf die beiden Schenkel AB, AC des Winkels gefällten Perpendikel HJ, HK ungleich; und dasjenige HJ das gröfsere, welches die den Winkel halbirende AD schneidet." Also „alle Punkte

aufserhalb der den Winkel halbirenden AD sind von dessen Schenkeln ungleich weit entfernt." — Denn es schneide die HJ die AD in L; und da der Winkel LKA, wenn man die LK zieht, als ein Theil des rechten HKA, spitzig ist: so wird das von L auf die AC gefällte Perpendikel auf die Seite des spitzen Winkels LKA fallen (§. 176.); es sey LM; und man ziehe MH. So ist die LJ=LM (a), also die JH=ML+LH; aber ML+LH>MH (I, 20.), und MH>HK (§. 198, 3); folglich noch viel mehr JH>HK.

c. Daher umgekehrt: „Alle Punkte, deren perpendiculäre Entfernungen von den beiden Schenkeln eines Winkels gleich sind, liegen auf der den Winkel halbirenden geraden Linie."

d. Aufgabe. (*Fig.* 158, a.) „Auf einer Seite BC eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt finden, dessen perpendiculäre Entfernungen von den zwei übrigen Seiten AB, AC gleich seyen." — Man halbire den Winkel BAC durch die AD, welche der BC in D begegne: so ist D der verlangte Punkt.

e. Aufgabe. (*Fig.* 158, b.) Innerhalb eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt finden, von welchem die Perpendikel auf seine drei Seiten gefällt, alle einander gleich seyen." — Analysis. Es sey D der verlangte Punkt: Da nun die Perpendikel von D auf die Seiten AB und BC gefällt, einander gleich seyn sollen: so mufs D auf der den Winkel ABC halbirenden geraden Linie liegen (nach c.). Ebenso, da die Perpendikel von D auf AC und CB gefällt, einander gleich seyn sollen: so mufs D auf der den Winkel ACB halbirenden geraden Linie liegen. — Daher Construction: Man halbire zwei Winkel ABC und ACB des Dreiecks durch zwei gerade Linien (I, 9.), so wird deren Durchschnittspunkt D der verlangte Punkt seyn. — Vgl. IV, 4.

f. (*Fig.* 159.) Allgemeiner, als was in c. gezeigt worden: „Wenn eine gerade Linie AE einen Winkel BAC in ungleiche Theile theilt: so sind die von irgend einem auf ihr angenommenen Punkte H auf des Winkels Schenkel AB, AC gefällten Perpendikel HJ, HK einander ungleich; und dasjenige HJ gröfser, das auf den Schenkel des gröfsern BAE von den ungleichen Theilen fällt." (*Fig.* 159, a.) Denn entweder sind die beiden Theile BAE, EAC spitzig; oder ist der gröfsere BAE ein rechter, oder ein stumpfer. Sind beide spitzig: so lege man an EA den Winkel EAL=EAC, und fälle

vom H auf die AL das Perpendikel HP: so ist HJ>HP (§. 205.). Aber HP=HK (nach a.): folglich auch HJ>HK.

(*Fig.* 159, b.) Ist der gröfsere Winkel BAE ein rechter: so ist HA das von H auf den Schenkel BA desselben fallende Perpendikel: und es ist im rechtwinklichten Dreieck HAK die HA>HK (§. 198, 3.).

(*Fig.* 159, c.) Ist der Winkel BAE stumpf: so fällt das von H auf dessen Schenkel BA gefällte Perpendikel HJ auf die Seite des spitzen Winkels EAb, wenn man die BA nach b verlängert (§. 176.); und es ist HJ>HK (§. 205.).

§. 271. (*Fig.* 160.) „Wenn von der Spitze A eines ungleichschenklichten Dreiecks ABC an dessen Grundlinie BC eine der halben Summe der ungleichen Schenkel AB, AC gleiche gerade Linie AD gezogen wird" (welches immer möglich ist (§. 209, 3)), indem diese halbe Summe gröfser ist als der kleinere AB, und kleiner als der gröfsere AC der ungleichen Schenkel): „so theilt diese die Grundlinie BC sowohl als den Winkel BAC an der Spitze in ungleiche Theile; und der gröfsere Theil von beiden liegt an dem kleinern Schenkel AB." — Denn man verlängere AD, und nehme DE=AD; ziehe BE: so ist (I, 20.) AB+BE>AE d. i. (Vorauss.) >AB+AC; folglich BE>AC. Da demnach AC>AD oder DE, und <BE ist: so läfst sich eine der AC gleiche von E an die BD ziehen (§. 209, 3)): sie sey EF. Da nun die Dreiecke ADC, EDF die zwei einander ungleichen Seiten AC, AD den Seiten EF, ED gleich haben, und auch die dem Paare der gröfsern Seiten gegenüberliegenden Winkel ADC, FDE gleich haben (I, 15.): so ist (§. 267. Satz B.) auch DC=FD, und Winkel DAC =DEF. Folglich ist BD>DC, und Winkel BED>DAC. Es ist aber Winkel BAE>BEA (Fig. 18.), weil BE >AC>AB; folglich noch mehr Winkel BAD>DAC. — Dieser Satz entspricht dem XXXIsten in B. I. des Menelaus über sphärische Dreiecke.

§. 272. a. Lehnsatz. (*Fig.* 161.) „Wenn von zwei bei A, D rechtwinklichten Dreiecken ABC, DEF das eine ABC die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite kleiner, und eine der anliegenden Seiten gröfser hat als das andere; BC<EF, und AC>DF: so hat es auch den Gegenwinkel der letztern Seite gröfser;" Winkel ABC>DEF. — Denn man schneide von der gröfsern AC die AG=DF ab, und ziehe BG. Und

da die BC<EF (Vorauss.), aber >CA (§. 198, 3.) und noch mehr >DF ist: so läfst sich (§. 209, 3)) von F an die DE eine der BC gleiche ziehen; sie sey FH. So ist (§. 267. Satz B. Zus. 1.) Winkel ABG=DHF und also (I, 16.) >DEF; und noch viel mehr ist Winkel ABC>DEF.

b. (*Fig.* 162.) „Wenn von der Spitze A eines ungleichschenklichten Dreiecks ABC eine gerade Linie AD an den Halbirungspunkt D der Grundlinie BC gezogen wird, und von einem auf ihr innerhalb des Dreiecks angenommenen Punkt E an die Endpunkte B, C der Grundlinie gerade Linien EB, EC gezogen werden, so schliefsen diese mit den Schenkeln des Dreiecks ungleiche Winkel ein; und zwar ist der mit dem kleinern Schenkel AB eingeschlossene der gröfsere;" Winkel EBA>ECA.

Bew. Da AB<AC; so ist (I, 18.) Winkel ACB <ABC, also spitzig (§. 174.); und noch mehr der Winkel ECA spitzig. Nun ist der Winkel EBA, der ein Theil des gröfsern ABC ist, entweder kleiner als ein rechter oder nicht. 1) (*Fig.* 162, a.) Ist er nicht kleiner als ein rechter: so ist er offenbar gröfser als der spitze ACE. 2) (*Fig.* 162, b.) Er sey nun aber kleiner als ein rechter. Da nun der Schenkel AB< AC, und die Grundlinie BC in D halbirt ist: so ist (§. 190.) Winkel BAD >DAC; daher letzterer DAC spitzig; auch ist (I, 25.) Winkel ADC stumpf; daher EC>EB (I, 24.). Weil also die Winkel EAC, ECA beide spitzig sind: so fällt das von E auf AC gefällte Perpendikel innerhalb des Dreiecks EAC (§. 177, 2.); es sey EF. Und da der Winkel BAE>EAC: so ist (§. 270, f.) das von E auf AB gefällte Perpendikel EG, welches an die Seite des spitzen Winkels EBA fällt (es mag nun innerhalb des Dreiecks EBA, oder auf dessen Seite EA, oder aufserhalb desselben fallen; je nachdem nämlich Winkel BAE ein spitzer, rechter oder stumpfer ist) gröfser als das Perpendikel EF. Demnach hat von den zwei rechtwinklichten Dreiecken GBE, FCE das erstere die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seiten kleiner, nämlich EB<EC nach dem Bewiesenen; und eine der anliegenden Seiten gröfser, die EG>EF: folglich hat es auch (nach a) den der leztern Seite gegenüberliegenden Winkel gröfser, d. i. Winkel ABE>ACE. — Dieses entspricht bei Menelaus L. I. Prop. XXXII.

c. (*Fig.* 163.) „Wenn in einem ungleichschenklichten Dreieck ABC von der Grundlinie BC an ihren End-

punkten B, C gleiche Stücke BD, CE abgeschnitten, und von der Spitze A an der Abschnitte Endpunkte D, E gerade Linien AD, AE gezogen werden: so schliefsen diese mit den Schenkeln ungleiche Winkel BAD, CAE ein, von welchen der mit dem kleineren Schenkel AB eingeschlossene BAD der gröfsere ist; auch sind sie zusammen kleiner als die ungleichen Schenkel des Dreiecks, AB, AC." — Denn man halbire die DE in F, ziehe AF, und verlängere sie bis FG=AF; ziehe DG, BG. So ist, da BD=EC, auch die BC in F halbirt; und (I, 15. 8.) DG=AE, BG=AC; Winkel DGF=FAE, BGF=FAC; daher auch Winkel BGD=CAE. Nun ist (I, 21.) BA+BG>DA+DG; daher auch BA+AC>AD+AE. Ferner da im Dreieck ABG der Schenkel BA <BG, und AG in F halbirt ist: so ist (nach b.) Winkel BAD >BGD d. i. >CAE. — Vgl. Menelaus L. I. Prop. XXXIII.

d. (*Fig.* 164.) „Wenn in einem ungleichschenklichten Dreiecke ABC von der Spitze A an die Grundlinie BC zwei gerade Linien AD, AE gezogen werden, welche mit den Schenkeln gleiche Winkel BAD, CAE einschliefsen: so schneiden die gezogenen von der Grundlinie BC an ihren Endpunkten B, C gleiche Stücke BD, CE ab, von welchen das gröfsere CE an dem gröfsern Schenkel AC liegt: auch sind die zwei gezogenen AD, AE zusammen kleiner als die zwei Schenkel AB, AC des Dreiecks zusammen." — Denn man halbire die BC in F; ziehe AF fort, bis FG=AF, ziehe BG, DG. So ist (I, 15. 8.) BG=AC, und Winkel GBF=ACF. Und da BG >AB, und die AG in F halbirt ist: so ist (nach b) Winkel BAD>BGD; folglich auch der dem BAD gleiche CAE>BGD. Man lege an die BG den Winkel CAE dem Winkel BGH gleich an. Da nun die Winkel HBG, BGH den Winkeln ECA, CAE gleich sind, und BG=CA: so ist (I, 26.) BH=CE, und GH=AE. Demnach ist BD<EC.

Ferner da der Winkel AFC stumpf ist (I, 25.), mithin auch der ihm gleiche BFG; so ist (§. 204, b.) die von der GF entferntere GD>GH d. i. AE; mithin AD+DG >AD+AE. Nun ist (I, 21.) AB+BG>AD+DG, also noch vielmehr >AD+AE; und daher auch AB+AC >AD+AE. — Menelaus L. I. Prop. XXXIV.

c. Lehnsatz. (*Fig.* 165.) Es sey irgend ein ungleichschenklichtes Dreieck ABC gegeben: so lassen sich von seiner Spitze A an die Grundlinie BC zwei gerade

Linien innerhalb des Dreiecks ziehen, welche zusammengenommen den Schenkeln des Dreiecks zusammen gleich seyen.

Man schneide vom gröfsern Schenkel AC die dem kleinern AB gleiche AF ab, und halbire FC in G; beschreibe aus dem Mittelpunkt A mit der Weite AG einen Kreis, der die BC schneiden wird (§. 209, 3.); es geschehe in H. Man nehme zwischen H, C einen beliebigen Punkt E; ziehe AE, und nehme die gerade Linie P so, dafs die P und AE zusammen den AB, AC zusammen gleich seyen.

Da nun AB, AC ungleich sind, AC die gröfsere; und von A die AE an die BC gezogen ist: so ist AC $>$AE (§. 202.). Und da P$+$AE$=$AB$+$AC; aber AE $>$AC: so ist P$<$AB.

Wiederum da AG$>$AF, das ist, AH$>$AB; und die AE von A an die verlängerte BH gezogen ist: so ist (§. 202.) AE$>$AH. Und da P$+$AE$=$AB$+$AC$=$2AH; aber AE$>$AH: so ist P$<$AH.

Da demnach P$>$AB und $<$AH: so läfst sich von A an die BH eine der P gleiche ziehen (§. 209, 3)): sie sey AD. So ist AD$+$AE$=$AB$+$AC.

f. (*Fig.* 166.) „Wenn in einem ungleichschenklichten Dreieck ABC von der Spitze A an die Grundlinie BC zwei gerade Linien AD, AE gezogen werden, welche den Schenkeln des Dreiecks AB, AC zusammen gleich sind: so werden dieselbe mit diesen Schenkeln ungleiche Winkel BAD, CAE einschliefsen, und von der Grundlinie BC ungleiche Stücke BD, CE abschneiden; und der gröfsere Winkel sowohl als das gröfsere Stück der Grundlinie liegen an dem kleineren Schenkel;" nämlich Winkel BAD$>$CAE; und BD$>$CE, wenn AB$<$AC.

Man halbire die DE in F, ziehe AF, und verlängere sie, bis FG$=$AF; ziehe BG, DG. So ist (I, 15. 8.) DG$=$AE; mithin AD$+$DG$=$AD$+$AE$=$AB$+$AC. Da nun (I, 21.) AB$+$BG$>$AD$+$DG d. i. $>$AB$+$AC: so ist BG$>$AC. Auch ist AC$>$AE oder GD (§. 202.), weil die AB, AC ungleich, AC die gröfsere, und von A an die AC die AF gezogen ist. Folglich. da AC$<$BG und $>$GD: so läfst sich eine der AC gleiche von G an die BD ziehen (§. 209, 3)): es sey GH. Auch ist AC$>$AF, weil AB$+$AC$=$AD$+$AE$=$AD$+$DC$>$AG (I, 21.) d. i. 2AF; und AC$>$AB ist. Da nun in den Dreiecken AFC, FGH die zwei einander ungleichen AF, AC den zweien GF, GH gleich sind, und die dem Paar der gröfsern

Seiten gegenüberliegenden Winkel AFC, HFG gleich sind: so ist (§. 267. Satz B.) FC=HF; und wenn man die gleichen DF, FE wegnimmt: so ist EC=HD; mithin BD>CE w. z. e. w. Auch ist Winkel CAF=HGF; und wenn man von diesen die gleichen EAF, DGF wegnimmt: so ist der übrige CAE=HGD. Da nun im ungleichschenklichten Dreieck ABG die BF die Grundlinie AG halbirt, und auf ihr innerhalb des Dreiecks der Punkt D angenommen ist: so ist (d. dieses §.) Winkel BAD>BGD und noch viel mehr >HGD d. i. CAE; w. z. e. w. — Menelaus L. I. Prop. XXXV.

§. 273. Den Sätzen A, B, C, D in §. 267. lassen sich noch folgende beifügen, welche mit jenen theils einerlei Bedingungen haben, theils in anderer Verbindung stehen, zum Theil Conversen derselben sind.

Satz E. Aufgabe. (*Fig.* 167.) Es sey irgend ein ungleichschenklichtes Dreieck ABC gegeben, welches die beiden Winkel an der Grundlinie BC schief habe: so wird sich ein anderes Dreieck beschreiben lassen, das seine Seiten den Seiten AB, AC des gegebenen, je eine einer, gleich, und den Gegenwinkel seiner kleinern Seite dem Gegenwinkel ABC der kleinern Seite AC des gegebenen gleich habe; aber seine Grundlinie, den Gegenwinkel der gröfsern Seite, und den von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkel, der Grundlinie BC, dem dem Winkel ACB und dem Winkel BAC beziehungsweise ungleich habe.

Man beschreibe das gleichschenklichte Dreieck DEF, welches die Schenkel DE, DF dem kleinern Schenkel AC des gegebenen gleich, und den Winkel DEF an der Grundlinie dem ACB gleich habe, wenn dieser spitzig ist; wenn er aber stumpf ist, den Aufsenwinkel DEG an der Grundlinie dem Winkel ACB gleich habe; und nehme im ersten Fall die FG, im andern die EG der BC gleich, und ziehe DG. So ist im ersten Fall DGE, im andern DGF das zu beschreibende Dreieck. Beweis durch I, 4.

Oder man beschreibe das gleichschenklichte Dreieck HJK, dessen Schenkel HJ oder HK dem gröfsern AB des gegebenen Dreiecks gleich sey, und die Winkel der Grundlinie bei J und K dem Winkel ABC gleich: und ziehe von H an JK die HL dem kleinern Schenkel AC gleich (§. 209, 3)): so ist von den Dreiecken HJL, HLK das eine dem gegebenen ABC durchaus gleich, das andere ist das verlangte.

Satz F. (*Fig.* 168.) Wenn zwei Dreiecke ABC, DEF zwei Seiten AB, AC zweien Seiten DE, DF, je eine einer, gleich haben, und auch die dem einen Paar gleicher Seiten gegenüberliegenden Winkel ABC, DEF gleich haben; die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel BAC, EDF aber zusammen entweder zweien rechten gleich, oder gröfser als zwei rechte sind: so werden sie auch die dritten Seiten BC, EF einander gleich haben, und durchaus gleich seyn.

Fall I. (*Fig.* 168, a.) Die Winkel BAC, EDF seyen 2 rechten gleich. Man verlängere ED nach G, nehme DG=AB oder DE, und ziehe GF. So ist Winkel FDG BAC (I, 13. und Vorauss. mit Ax. 3.); es sind aber auch die Seiten FD, DG den Seiten CA, AB gleich: folglich ist auch (I, 4.) FG=BC, und Winkel G=B. Aber auch Winkel E=B (Vorauss.): daher die Winkel E, G gleich; und folglich (I, 6.) die EF, FG gleich: daher auch die EF der BC gleich; und (I, 4.) die Dreiecke DEF, ABC durchaus gleich.

Fall II. (*Fig.* 168, b.) Die Winkel BAC, EDF seyen >2 rechte. Man lege an FD den Winkel FDG =BAC an der andern Seite von FD, als an welcher der Winkel FDE liegt; und nehme DG=AB oder DE; ziehe FG, EG. So ist (I, 4.) FG=BC, und Winkel FGD=ABC und also auch =FED. Und da DG=DE: so ist (I, 5.) Winkel DFE=DEG. Folglich ist auch der ganze FGE dem ganzen FEG gleich; daher (I, 6.) die FE der FG, und mithin auch der BC gleich; und (I, 4.) die Dreiecke ABC, DEF durchaus gleich.

Satz G. (*Fig.* 169, a.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, DEF zwei Seiten BA, AC zweien Seiten ED, DF, je eine einer, gleich haben, und auch einen Winkel ABC einem Winkel DEF gleich, der dem einen Paar gleicher Seiten gegenüberliegt: so sind die dem andern Paar gegenüberliegenden Winkel ACB, DFE entweder einander gleich oder zusammen zweien rechten gleich."

Bew. Die Grundlinien BC, EF sind entweder gleich oder ungleich. Sind sie gleich; so sind (I, 4.) auch die Winkel ACB, DFE gleich. Sind sie ungleich; und die EF die gröfsere: so schneide man von ihr die EG=BC ab, und ziehe DG. So ist (I, 4.) DG=AC und Winkel DGE=ACB. Und da auch DF=AC ist (Vorauss.): so ist das Dreieck DGF gleichschenklicht, und Winkel DFG=DGF. Nun sind die Winkel DGE+DGF=2 rechten (I, 13.): also auch die Winkel ACB+DFE=2 rechten.

Anderer Beweis. (*Fig.* 169, b.) Entweder sind die Winkel BAC, EDF gleich oder ungleich; und wenn sie ungleich sind, so sind sie zusammen entweder kleiner als zwei rechte oder nicht. Sind sie gleich: so sind (I, 4.) auch die Winkel ACB, DFE gleich. Sind sie zusammen nicht kleiner als zwei rechte; da übrigens die AB, AC den DE, DF, und Winkel ABC dem DEF gleich sind: so werden (nach Satz F) die BC, EF gleich seyn; daher auch (I, 4.) die Winkel ACB, DFE gleich. Sind aber die Winkel BAC, EDF ungleich und zusammen <2 rechte: so lege man an FD auf der andern Seite den Winkel FDH=BAC, und nehme die DH=AB oder DE, und ziehe FH. Da nun die FD, DH den CA, AB, und Winkel FDH dem CAB gleich sind: so ist (I, 4.) Winkel DHF=ABC und DFH=ACB. Und da auch Winkel DEF=ABC: so sind die Winkel DEF, DHF gleich. Und nun werden die EF, FH geradefort an einander liegen: denn läge F oberhalb oder unterhalb der die Punkte E, H verbindenden geraden Linie: so wären (nach §. 252, 4. b.) die Winkel DEF, DHF ungleich; welche doch nach dem Bewiesenen gleich sind. Da demnach die EF, FH geradefort an einander liegen: so sind (I, 13.) die Winkel DFE, DFH, und mithin auch die Winkel DFE, ACB 2 rechten gleich.

Zus. 1. Wenn demnach zwei Dreiecke zwei Seiten zweien Seiten, je eine einer, und einen Winkel einem Winkel gleich haben, der einem Paare gleicher Seiten gegenüberliegt; aber

a) die Grundlinien ungleich haben;
b) oder die dem andern Paare gleicher Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich haben;
c) oder die von den, zwei und zwei, gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel ungleich haben:

so sind die dem andern Paare gleicher Seiten gegenüberliegenden Winkel zusammen zweien rechten gleich.

Zus. 2. Und dasjenige der beiden Dreiecke, das die kleinere Grundlinie hat, hat von den zwei letztgenannten Winkeln den stumpfen, das andere den spitzigen; auch hat jenes den kleinern von den von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkeln. (Nämlich wenn $BC<EF$; so ist Winkel ACB stumpf, DFE spitzig; und Winkel $BAC<EDF$.) Ferner sind die letztgenannten paar Seiten AB, DE die gröfseren (nämlich $DE>DF$ oder DG in Fig. 188, a. nach §. 201, b. So auch in Fig. 188, b. DE, DH jede $>DF$ nach §. 201, b.). Auch sind die

von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel BAC, EDF zusammen <2 rechte: Denn verlängert man (Fig. 188, a.) die ED nach K: so ist Winkel KDF$>$F oder DGF$>$EDG (I, 16.): folglich Winkel EDF$+$EDG$<$EDF $+$FDK d. i. <2 rechte; also auch Winkel EDF$+$BAC <2 rechte.

Satz H. (*Fig.* 169, a. c.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, DEF eine Seite AB einer Seite DE, und das eine Paar der daran liegenden Winkel ABC, DEF gleich haben; die Gegenwinkel ACB, DFE der gleichen Seiten aber unter sich ungleich, und zusammen zweien rechten gleich sind: so sind die Gegenseiten AC, DF der gleichen Winkel gleich; und diese Seiten sind die kleineren."

Bew. Es sey von den ungleichen Winkeln ACB, DFE der ACB der gröfsere; so wird die BC$<$EF seyn. Denn gleich können sie nicht seyn: sonst wäre, da auch AB=DE, und Winkel B=E ist (Vorauss.), auch Winkel ACB=DFE (I, 4.); er ist aber gröfser. Auch kann nicht BC$>$EF seyn: sonst wäre, wenn man von der BC die BJ=EF abschneidet, und AJ zieht, Winkel DFE =AJB (I, 4.) und also (I, 16.) $>$ACB; er ist aber kleiner. Da demnach die EF$>$BC ist: so schneide man von ihr die EG=BC ab, und ziehe DG: so ist (I, 4.) DG=AC, und Winkel DGE=ACB. Daher auch Winkel DGE$+$DFE = Winkel ACB$+$DFE das ist (Vorauss.) $=2$ rechten. Nun sind auch Winkel DGE $+$DGF$=2$ rechten (I, 13.): daher Winkel DFG=DGF; und folglich (I, 6.) DG=DF. Nun war aber DG=AC. Folglich sind AC, DF gleich; w. z. e. w. Und es ist die DE$>$DF (nach §. 201, b.), weil die DE von der Spitze D an die verlängerte Grundlinie FG des gleichschenklichten Dreiecks DGF gezogen ist).

Satz J. (*Fig.* 168, c. b.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, DEF eine Seite AC einer Seite DF, und deren Gegenwinkel ABC, DEF gleich haben; die Gegenwinkel ACB, DFE zweier anderer Seiten aber zusammen zweien rechten gleich sind: so sind diese andern Seiten AB, DE einander gleich; und sie sind die gröfseren."

Bew. Denn man verlängere die EF nach H, und mache FH=BC; ziehe DH. So wird der Winkel DFH dem ACB gleich seyn (weil jeder von ihnen mit dem DFE zusammen 2 rechte ausmacht, nach I, 13. und Vorauss.). Es ist aber auch DF=AC. Da demnach die DF, FH den AC, CB, und Winkel DFH dem ACB gleich

sind: so ist auch (I, 4.) DH=AB, und Winkel H=B. Es ist aber auch Winkel E=B (Vorauss.): Folglich sind die Winkel bei E, H einander gleich: daher (I, 6.) DE, DH gleich; und da auch die AB=DH (Bew.); so sind die AB, DE gleich; w. z. e. w. Und es ist die DE>DF (nach §. 201, b.), weil die DF von der Spitze D des gleichschenklichten Dreiecks DEH an seine Grundlinie geht.

Anwendung: 1) (*Fig.* 170.) „Wenn von dem Endpunkt D der einen Winkel BAC halbirenden geraden Linie AD an dessen Schenkel AB, AC zwei gleiche gerade Linien DE, DF gezogen sind: so sind die inneren Winkel DEA, DFA, welche sie mit den Schenkeln machen, entweder einander gleich oder zusammen zweien rechten gleich." — Folgt aus Satz G. Wenn nämlich die DE entweder auf der AB senkrecht; oder nicht <DA ist: so läfst sich nur eine einzige der DE gleiche von D an die AC ziehen; und diese wird mit der AC einen Winkel machen, der dem DEA gleich ist. Steht aber die DE auf der AB schief, und ist sie zugleich <DA: so lassen sich von D an die AC zwei der DE gleiche ziehen, von denen der Winkel der einen mit AC dem DEA gleich, der andern mit DEA zusammen zwei rechten gleich seyn wird.

2) Und wenn die zwei geraden Linien DE, DF (indem das übrige bleibt, wie vorhin) so gezogen sind, dafs die Winkel DEA, DFA 2 rechten gleich seyen: so sind die gezogenen DE, DF einander gleich. — Folgt aus Satz H.

§. 274. Andere Anwendungen des Satzes I, 26. kommen vor bei den Beweisen folgender Sätze in Betreff zweier Dreiecke, welche, wenn sie gewifse Stücke gleich haben, auch die übrigen gleich haben werden.

1. (*Fig.* 171, a.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc zwei Winkel zweier Winkeln, nämlich die an der Grundlinie, je einen einem, gleich haben, den ABC dem abc, und den ACB dem acb; und auch die von der Spitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikel gleich haben: so werden sie auch die Grundlinie BC der Grundlinie bc; die übrigen Seiten den übrigen, die an den gleichen Winkeln liegen. nämlich die AB der ab, und die AC der ac; und den übrigen Winkel BAC dem übrigen bac gleich haben.

Fall I. Das Perpendikel AD falle innerhalb des Dreiecks ABC: so sind (§. 177.) beide Winkel bei B

und C spitzig; folglich auch die ihnen gleichen bei b und c spitzig; und mithin fällt auch (§. 177.) das Perpendikel von a auf die Grundlinie bc, innerhalb des Dreiecks abc; es sey ad. Da nun die Winkel B, BDA den Winkeln b, bda gleich sind, und AD=ad: so ist (I, 26. 2 Thl.) auch AB=ab, BD=bd, Winkel BAD=bad. Eben so wird bewiesen, dafs auch AC=ac, CD=cd, Winkel CAD=cad. Folglich ist auch (Ax. 2.) die ganze BC der ganzen bc, und der ganze Winkel BAC, dem ganzen bac gleich.

Fall II. (*Fig.* 171, b.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks ABC nächst einer der beiden Seiten, es sey nächst der Seite AB: so ist der Winkel ABC stumpf (§. 177.); daher auch der abc stumpf; und mithin fällt auch das Perpendikel von a auf die verlängerte cb nächst der Seite ab (§. 177.); es sey ad. Da nun die Winkel D, C den Winkeln d, c, und die AD der ad gleich ist: so ist auch AC=ac, DC=dc, und Winkel DAC=dac (I, 26. 2 Thl.). Eben so weil auch der gleichen Winkel ABC, abc Nebenwinkel ABD, abd gleich sind (I, 13.), wird gezeigt, dafs auch AB=ab, DB=db, und Winkel DAB=dab. Folglich ist auch (Ax. 3.) BC=bc, und Winkel BAC=bac.

2. (*Fig.* 171, a. b. c.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc zwei Winkel zweien Winkeln, nämlich die an der Grundlinie, je einen einem, den ABC dem abc, und den ACB dem acb gleich haben; und auch den zwischen dem einen der gleichen Winkel und dem aus der Spitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikel fallenden Abschnitt BD, bd gleich haben: so werden sie auch das übrige dem übrigen gleich haben."

Fall I. (*Fig.* 171, a.) Das Perpendikel AD falle innerhalb des Dreiecks ABC: so wird auch (wie vorhin bei nr. 1. bewiesen worden) das Perpendikel ad innerhalb des Dreiecks abc fallen. Da nun die Winkel B, BDA den Winkeln b, bda, und die BD der bd gleich ist: so ist auch (I, 26. 1 Thl.) AB=ab. Es haben mithin die Dreiecke ABC, abc die Winkel B, C den Winkeln b, c gleich, und die Seite AB der ab gleich: folglich ist auch das übrige dem übrigen gleich (I, 26. 2 Thl.).

Fall II. (*Fig.* 190, b.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks ABC nächst der Seite AB: so wird auch (wie in nr. 1. Fall II. gezeigt worden), das Perpendikel von a auf die verlängerte cb aufserhalb des Dreiecks abc nächst der Seite ab fallen. Da nun Win-

kel ABC=abc: so ist auch (I, 13.) Winkel ABD=abd; daher in den Dreiecken ABD, abd die Winkel ABD, ADB den Winkeln abd, adb gleich, und die Seite BD=bd, welche an den gleichen Winkeln liegt: folglich auch (I. 26. 1 Thl.) AB=ab daher, wie in Fall I., auch das übrige gleich.

Fall III. (*Fig.* 171, c.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks ABC nächst der Seite AC: so wird auch das Perpendikel von a auf die verlängerte bc aufserhalb des Dreiecks abc nächst der Seite ac fallen. Und der Beweis ist wie in Fall I.

3. (*Fig.* 172, a. b.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc zwei Winkel zweien Winkeln, nämlich die an der Grundlinie, je einen einem, den ABC dem abc, und den ACB dem acb gleich haben, und auch die Unterschiede der Abschnitte BD und CD, bd und cd, in welche die Grundlinien durch die von den Spitzen gefällten Perpendikel getheilt werden, wofern diese Perpendikel innerhalb der Dreiecke fallen; oder, wenn sie aufserhalb fallen, die Summen der gedachten Abschnitte gleich haben: so haben sie auch das übrige gleich.

Fall I. (*Fig.* 172, a.) Die Perpendikel AD, ad fallen innerhalb der Dreiecke. Man schneide von dem gröfsern Abschnitt BD die dem kleinern DC gleiche DE ab; und ebenso von db die de der dc gleich; und ziehe AE, ae. Nun sind BE, be die Unterschiede der Abschnitte; und (Vorauss.) einander gleich. Und es werden (I, 4.) die Winkel AEC, ACE gleich seyn; ebenso die Winkel aec, ace. Da nun die Winkel C, c gleich sind: so sind auch die Winkel AEC, aec gleich; daher auch ihre Nebenwinkel AEB, aeb. Es sind demnach die Winkel B, BEA den Winkeln b, bea gleich, und BE=be; folglich auch AB=ab (I, 26.). Und daher (wie im vorherg.) vermöge I, 26. 2 Thl. auch das übrige gleich.

Fall II. (*Fig.* 172, b.) wird auf ähnliche Art bewiesen.

4. (*Fig.* 173.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc die Winkel an der Spitze BAC, bac, und einen der Winkel an der Grundlinie, ABC, abc, einander gleich haben, und auch die die Winkel an den Spitzen halbirenden geraden Linien AD, ad einander gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Denn da die ganzen Winkel BAC, bac gleich sind: so sind auch ihre Hälften BAD, bad gleich. Demnach sind in den Dreiecken ABD, abd die Winkel BAD, ABD den Winkeln bad, abd gleich, und die Seite AD der ad

gleich, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: folglich ist auch (I, 26. 2 Thl.) die AB der ab gleich. Und daher (I, 26. 2 Thl.) in den Dreiecken ABC, abc auch das übrige dem übrigen gleich.

5. (*Fig.* 174.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc die Grundlinie BC der Grundlinie bc, und den anliegenden Winkel ABC dem abc gleich haben, und auch den Winkel BAD dem Winkel bad gleich haben, welchen die an den genannten Winkeln liegenden Seiten AB, ab mit den von den Spitzen an die Halbirungspunkte der Grundlinien gezogenen geraden Linien AD, ad machen: so haben sie auch das übrige dem übrigen gleich."

Denn da die BC, bc gleich sind: so sind auch ihre Hälften BD, bd gleich. Demnach sind in den Dreiecken ABD, abd die Winkel BAD, ABD den Winkeln bad, abd, und die Seite BD der bd gleich; folglich (I, 26. 2 Thl.) auch die AB der ab gleich. Daher sind die zwei AB, BC den zweien ab, bc, und der Winkel ABC dem abc gleich; folglich (I, 4.) auch das übrige dem übrigen.

6. (*Fig.* 171.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc die Winkel an der Spitze BAC, bac, und einen der Winkel an der Grundlinie ABC, abc gleich haben; und auch die von den Spitzen auf die Grundlinien gefällten Perpendikel gleich haben; es mögen diese innerhalb oder auserhalb der Dreiecke fallen: so werden sie auch das übrige gleich haben.

Fall I. (*Fig.* 171, a.) Das Perpendikel AD falle innerhalb des Dreiecks ABC: so wird auch das Perpendikel von a auf bc innerhalb des Dreiecks abc fallen. Denn da der Winkel ABC spitzig ist (§. 177.): so ist auch der ihm gleiche abc spitzig; folglich fällt das Perpendikel von a auf bc an die Seite dieses spitzen Winkels (§, 176, b.): es kann aber weder auf die ac, noch auserhalb des Dreiecks nächst der ac fallen: denn im ersten Fall wäre der Winkel bac dem BAD gleich (weil die Winkel B, BDA den Winkeln b, bca, und die AD der ac gleich wäre (Vorauss.); folglich nach I, 26. Winkel BAD=bac); er ist aber auch dem BAC gleich (Vorauss.); folglich wäre der Winkel BAD dem BAC gleich, der Theil dem ganzen; welches unmöglich ist. Im andern Fall aber (*Fig.* 171, d.), da wiederum die Winkel B, BDA den Winkeln b, bda, und die AD der ad gleich wären, wäre auch (I, 26.) Winkel BAD=bad und mithin >bac oder BAC; welches unmöglich ist. Folglich mufs das

Perpendikel ad innerhalb des Dreiecks abc fallen; und es ist (*Fig.* 171, a.) zufolge der Bedingungen, die so eben betrachtet worden, wiederum vermöge I, 26. die AB der ab gleich. Da demnach die Winkel B, BAC den Winkeln b, bac gleich sind, und die Seite AB der Seite ab, welche an den gleichen Winkeln liegt: so ist auch (I, 26. 1 Thl.) das übrige dem übrigen gleich.

Fall II. (*Fig.* 171, c.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks ABC, nächst der Seite AC. Der Beweis ist dem vorigen analog.

Fall III. (*Fig.* 171, b.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks, nächst der Seite AB: so wird auch das Perpendikel von a auf bc aufserhalb des Dreiecks abc, nächst der Seite ab fallen. Denn da alsdann der Winkel ABC stumpf ist (§. 177.); folglich auch der ihm gleiche abc stumpf: so fällt das Perpendikel auf die Seite seines spitzigen Nebenwinkels (§. 176, b.), das ist, aufserhalb: und der Winkel ABD ist =abd, als Nebenwinkel der gleichen ABC, abc. Demnach sind die Winkel ABD, BDA den Winkeln abd, bda gleich, und die Seite AD=ad: daher (I, 26.) auch AB=ab; und hieraus das übrige wie vorhin.

7. „Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel zweien Winkeln, je einen einem, den einen an der Spitze, den andern an der Grundlinie, gleich haben, und auch von den durch das aus der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel gemachten Abschnitten der Grundlinie den einen dem einen gleich haben, denjenigen nämlich, welcher an dem gedachten Winkel an der Grundlinie liegt: so werden sie auch das übrige dem übrigen gleich haben."

Wird auf ähnliche Art wie nr. 6. bewiesen.

8. (*Fig.* 171, a. c.) „Wenn zwei ungleichschenklichte Dreiecke ABC, abc, in denen das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel AD, ad innerhalb fällt, die Perpendikel AD, ad sowohl, als die Unterschiede der Abschnitte BD und DC, bd und dc, in welche sie die Grundlinie theilen, gleich haben, und auch den einen Winkel an der Grundlinie dem einen gleich haben, er mag nun in beiden der gröfsern, oder der kleinern Seite gegenüberliegen: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Fall I. (*Fig.* 171, a.) Es seyen die den gröfsern Seiten AB, ab gegenüberliegenden Winkel ACB, acb an der Grundlinie einander gleich. Da AB, ab die gröfse-

ren Seiten sind: so sind auch BD, bd die gröfseren Abschnitte (§. 203. oder 261, 4.). Und, da die Winkel C, CDA den Winkeln c, cda, und die AD der ad gleich ist: so ist (I, 26. 2 Thl.) die AC der ac, und die CD der cd gleich. Und da die Unterschiede der Abschnitte einander gleich sind, und der kleinere Abschnitt CD dem kleinern cd gleich ist: so wird auch der gröfsere BD dem gröfsern bd gleich seyn. Folglich ist auch die ganze Grundlinie BC der ganzen bc gleich. Da demnach die AC, CB den ac, cb, und der Winkel ACB dem acb gleich ist: so ist auch (I, 4.) das übrige dem übrigen gleich.

Fall II. Wenn die den kleinern Seiten AC, ac gegenüberliegenden Winkel ABC, abc gleich sind: so wird der Satz auf ähnliche Art bewiesen.

9. (*Fig.* 171, c.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc, in denen das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel aufserhalb fällt, die Perpendikel AD, ad sowohl, als die Summen der zwischen dem Perpendikel und den beiden Endpunkten der Grundlinie fallenden Abschnitte BD und CD, bd und cd gleich haben; und auch einen Winkel einem Winkel an der Grundlinie gleich haben, es sey nun der dem Perpendikel nähere oder der entferntere: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Fall I. Es sey der Winkel ACB dem acb gleich: so sind auch ihre Nebenwinkel ACD, acd gleich. Da demnach die Winkel ACB, ADC den Winkeln acd, adc gleich sind, und AD=ad: so ist auch (I, 26. 2 Thl.) AC=ac, und CD=cd. Es ist aber auch die Summe der Abschnitte BD, CD der Summe bd, cd gleich: folglich ist auch der Abschnitt BD dem bd gleich: daher auch die BC der bc. Da demnach die AC, CB den ac, cb gleich sind, und Winkel ACB=acb: so ist auch (I, 4.) das übrige dem übrigen gleich.

Fall II. Es sey der Winkel ABC dem abc gleich. Da demnach die Winkel ABD, ADB den Winkeln abd, adb gleich sind, und AD=ad: so ist auch (I, 26.) AB=ab, und BD=bd: woraus das übrige auf ähnliche Art wie in Fall I. folgt.

10. (*Fig.* 171.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc, die Grundlinie BC der Grundlinie bc, und von den Winkeln an der Grundlinie, welche beide schief seyen, den einen ABC dem einen abc, und auch die von den Spitzen auf die Grundlinien fallenden Perpendikel AD,

ad gleich fallen; so werden sie auch das übrige gleich haben."

Fall I. (*Fig.* 171, a.) Das Perpendikel AD falle innerhalb des Dreiecks ABC: so ist der Winkel ABC spitzig; daher auch der Winkel abc; und demnach wird (§. 176, b.) das Perpendikel ad innerhalb des Winkels abc fallen: es wird aber auch innerhalb des Dreiecks abc fallen. Denn da die Winkel B, BDA den Winkeln b, bda gleich sind, und AD=ad: so ist (I, 26.) auch BD=bd. Es ist aber auch BC=bc. Da nun BC>BD: so wird auch bc>bd seyn. Fiele aber das Perpendikel ad nicht innerhalb; sondern auf die ac, oder aufserhalb des Dreiecks nächst der ac: so wäre bd $\overline{=}$ bc; welches dem vorigen widerspricht. Also mufs das Perpendikel ad innerhalb fallen. Und nun ist AB=ab (ebenfalls nach I, 26.). Also die AB, BC=ab, bc, und Winkel ABC=abc: daher das übrige nach I, 4.

Fall II. (*Fig.* 171, c.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks nächst der Seite AC.

Fall III. (*Fig.* 171, b.) Es falle aufserhalb, nächst der Seite AB.

Der Beweis für diese Fälle wird auf ähnliche Art geführt.

§. 275. Fortsetzung der Anwendungen des Satzes I, 26.

1. (*Fig.* 175.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc die Grundlinien BC, bc; die Summen der Seiten BA+AC, ba+ac, und einen Winkel einem Winkel, nämlich an der Grundlinie, den ABC dem abc gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Man verlängere BA nach D, ba nach d, und nehme AD=AC, ad=ac; ziehe DC, dc. So ist BD der Summe BA+AC gleich, bd der Summe ba+ac; also BD=bd. Demnach sind die zwei DB, BC den zweien db, bc, und der Winkel DBC dem dbc gleich: daher (I, 4.) DC=dc, und Winkel BDC=bdc. Wegen AC=AD sind aber (I, 5.) die Winkel ADC, ACD gleich; und ebenso die Winkel adc, acd. Daher sind die zwei Winkel ADC, ACD den zweien adc, acd gleich, und die Seite CD der cd gleich, die an den gleichen Winkeln liegt: folglich (I, 26. 1 Thl.) die AC der ac, die AD der ad gleich; und da die ganze BD der ganzen bd gleich ist: so ist auch die übrige BA der übrigen ba gleich.

2. (*Fig.* 176.) Wenn zwei ungleichschenklichte Dreiecke ABC, abc die Grundlinie BC der Grundlinie bc, die Gegenwinkel ACB, acb der gröfsern Seiten AB, ab, und die Unterschiede der Seiten gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben.

Man verlängere die AC nach D, die ac nach d, und mache die AD=AB, ad=ab; ziehe BD, bd. Da Winkel ACB=acb: so sind auch die Nebenwinkel BCD=bcd. Und die CD, cd sind die Unterschiede der Seiten AB und AC, ab und ac; und mithin einander gleich (Vorauss.). Da demnach die zwei BC, CD den zweien bc, cd, und der Winkel BCD dem bcd gleich ist: so sind (I, 4.) auch BD=bd, und Winkel BDC=bdc. Im gleichschenklichten Dreieck ABD ist aber Winkel ABD=ADB; ebenso Winkel abd=adb. Da demnach die Winkel ABD, D den Winkeln abd, d, und die BD der bd gleich ist, die an den gleichen Seiten liegt: so ist (I, 26. 1 Thl.) die BA=ba, AD=ad: und da von diesen letztern die CD=cd ist, so ist auch die übrige AC=ac; auch ist der Winkel bei A dem bei a gleich.

3. (*Fig.* 177.) „Wenn zwei ungleichschenklichte Dreiecke ABC, abc die Grundlinie BC der Grundlinie bc, die Gegenwinkel ABC, abc der kleinern Schenkel AC, ac, und die Unterschiede der Schenkel gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Man schneide von der AB die AD=AC, von der ab die ad=ac ab, und ziehe CD, cd. So sind BD, bd die Unterschiede der Schenkel, und einander gleich. Da demnach die CB, BD den cb, bd, und Winkel CBD dem cbd gleich ist: so ist (I, 4.) die DC der dc, und Winkel BDC dem bdc; daher auch die Nebenwinkel ADC, adc gleich. Der ADC ist aber dem ACD, der acd dem acd gleich (I, 5.): und demnach die zwei ADC, ACD den zweien adc, acd gleich, und die DC der dc: folglich (I, 26. 1 Thl.) AC=ac, und AD=ad; und da auch BD=bd: so ist die ganze BA=ba.

Folgerungen:

a) „Wenn zwei rechtwinklichte Dreiecke eine der um den rechten Winkel liegenden Seiten, und die Summe oder Unterschied der übrigen Seiten gleich haben: so haben sie auch das übrige gleich." — Folgt aus nr. 1. und 2. dieses §.

b) (*Fig.* 178.) „Wenn zwei gleichschenklichte Dreiecke ABC, abc die Grundlinie BC der Grundlinie bc,

und die Summe oder Unterschied des Schenkels und des Perpendikels, BA und AD, ba und ad, gleich haben: so haben sie auch die Schenkel AB, ab gleich." — Denn da BC=bc; so sind auch ihre Hälften BD, bd gleich. Demnach sind in den rechtwinklichten Dreiecken ABD, abd die einen um den rechten Winkel liegenden Seiten BD, bd, und die Summe oder Unterschied der übrigen Seiten gleich: daher (nach a) auch die Seiten AB, ab gleich.

c) (*Fig.* 171.) Wenn zwei Dreiecke ABC, abc einen Winkel BAC einem Winkel bac, nämlich den an der Spitze, und die von den Spitzen auf die Grundlinie fallenden Perpendikel AD, ad gleich haben; und auch die Summe oder den Unterschied einer Seite und des daran liegenden durch den Perpendikel gemachten Abschnitts, AB und BD, ab und bd, gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben.

Fall I. (*Fig.* 171, a) Das Perpendikel AD falle innerhalb des Dreiecks ABC; und das Perpendikel ad innerhalb des Winkels abc: so wird es auch innerhalb des Dreiecks abc fallen. Denn da AD=ad, und die Summe oder der Unterschied von AB und BD, von ab und bd gleich sind; so ist in den bei D, d rechtwinklichten Dreiecken ABD, abd (nach a) die AB=ab, und Winkel BAD=bad. Und hieraus läfst sich wie in §. 274. nr. 6. Fall I. zeigen, dafs das Perpendikel ad innerhalb des Dreiecks abc fallen werde: Auch wird der Winkel ABD=abd seyn. Da demnach die Winkel BAC, ABC den Winkeln bac, abc gleich sind, und die AB der ab gleich: so ist (I, 26. 1 Thl.) auch das übrige dem übrigen gleich.

Fall II (*Fig.* 171, c.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks nächst der Seite AC; und das Perpendikel ad innerhalb des Winkels abc: so wird es auch aufserhalb des Dreiecks abc nächst der Seite ac fallen. Dieses und das übrige wird auf ähnliche Art wie in Fall I. bewiesen.

Fall III. (*Fig.* 171, b.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks nächst der Seite AB; und das Perpendikel ad innerhalb des Winkels acb: so wird es auch aufserhalb des Dreiecks abc nächst der Seite ab fallen. Dieses, und dafs Seite AB=ab, Winkel ABD=abd sey, wird wie in den vorigen Fällen bewiesen. Alsdann sind auch der letztern Winkel Nebenwinkel ABC, abc gleich: woraus das übrige vermöge I, 26. folgt.

d) (*Fig.* 171.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc von den Winkeln an der Grundlinie den einen ACB dem einen acb, und von den durch die Perpendikel gemachten Abschnitten den einen BD dem einen bd gleich haben, der an dem andern Winkel an der Grundlinie liegt; und auch die Summe oder den Unterschied des Perpendikels und der dem erstern Winkel gegenüberliegenden Seite, AD und AB, ad und ab, gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Wird auf ähnliche Art wie der vorhergehende Satz c) bewiesen.

§. 276. Anwendungen der Sätze B und D in §. 267.

1. (*Fig.* 171.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc eine Seite AB einer Seite ab, und einen Winkel BAC einem Winkel bac, nämlich den an der Spitze, und das Perpendikel AD dem Perpendikel ad gleich haben, das von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Fall I. (*Fig.* 171, a.) Das Perpendikel AD falle innerhalb des Dreiecks ABC, und das Perpendikel ad innerhalb des Winkels abc: so wird es auch innerhalb des Dreiecks abc fallen. Denn da die Seiten BA, AD den Seiten ba, ad gleich, und die Winkel BDA, bda rechte sind: so ist (§. 267. Satz B. Zus. 1.) Winkel BAD=bad. Fiele nun das Perpendikel ad auf die ac oder aufserhalb nächst der ac: so wäre Winkel bad, also auch BAD $\overline{>}$ bac d. i. BAC; ein Theil dem Ganzen; welches unmöglich ist. Also fällt ad innerhalb. Und es ist vermittelst des angeführten Satzes Winkel ABC=abc. Aber auch Winkel BAC=bac, und AB=ab (Vorauss.). Folglich (I, 26.) BC=bc, und AC=ac.

Fall II. (*Fig.* 171, c.) Das Perpendikel AD falle aufserhalb des Dreiecks ABC nächst der Seite AC; und das Perpendikel ad innerhalb des Winkels abc: so wird es auch aufserhalb des Dreiecks abc nächst der Seite ad fallen. Dieses und das übrige wird auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Fall bewiesen.

Fall III. (*Fig.* 171, b.) Die Perpendikel AD, ad fallen aufserhalb nächst den Seiten AB, ab: so wird gezeigt, dafs Winkel ABD=abd; daher auch Winkel ABC =abc; und hieraus das übrige vermittelst I. 26.

2. (*Fig.* 179, a.) „Wenn zwei ungleichschenklichte Dreiecke ABC, abc, in welchen die Perpendikel AD, ad von den Spitzen auf die Grundlinien innerhalb fallen, die

Unterschiede der durch den Perpendikel gemachten Abschnitte BD, DC, und bd, dc einander gleich, und einen Winkel einem Winkel gleich haben, der in beiden entweder an dem gröfsern oder an dem kleinern Abschnitte liegt; und auch die von den Spitzen an die Halbirungspunkte E, e der Grundlinien BC, bc gezogenen geraden Linien AE, ae einander gleich haben: so werden sie auch das übrige gleich haben."

Fall I. Es seyen die an den gröfsern Abschnitten AD, bd liegenden Winkel ABC, abc gleich. Da die BD die BE oder EC um die ED übertrifft, aber auch die EC die DC um die ED übertrifft: so übertrifft die BD die DC um die doppelte ED: also ist ED dem halben Unterschied der Abschnitte BD, DC gleich. Ebenso wird ed dem halben Unterschied der Abschnitte bd, dc gleich seyn. Und da diese Unterschiede gleich sind (Vorauss.): so ist ED=ed. Es ist aber auch AE=ae, und die Winkel bei D, d rechte. Folglich ist (§. 267. Satz B. Zus. 1.) Winkel AED=aed, und deren Nebenwinkel AEB=aeb. Da nun die Winkel B, BEA den Winkeln b, bea gleich sind, und die Seite AE der ae, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt: so ist (I, 26. 2 Thl.) die AB=ab, und BE=be; daher auch die Doppelten gleich, BC=bc. Da mithin die AB, BC den ab, bc, und Winkel ABC dem abc gleich sind: so ist (I, 4.) das übrige dem übrigen gleich.

Fall II. Es seyen die an den kleinern Abschnitten DC, dc liegenden Winkel ACB, acb gleich. So wird, wie vorhin, gezeigt, dafs Winkel AED=aed. Da demnach die Winkel AEC, BCE den Winkeln aec, ace gleich sind, und die AE der ae gleich ist: so ist auch (I, 26.) die AC der ac, und die CE der ce gleich; daher auch die BC der bc. Und hieraus das übrige vermittelst I, 4.

3. (*Fig.* 179, b.) „Wenn zwei Dreiecke ABC, abc, in welchen die Perpendikel von den Spitzen auf die Grundlinien aufserhalb fallen, die Summen der zwischen dem Perpendikel und jedem der Endpunkte der Grundlinie fallenden Abschnitte, BD+DC, bd+dc, und einen Winkel einem Winkel gleich haben, es sey nun der dem Perpendikel nähere oder der entferntere; und auch die von den Spitzen an die Halbirungspunkte der Grundlinien gezogenen geraden Linien AE, ae gleich haben: so werden sie auch das übrige dem übrigen gleich haben."

Der Beweis ist dem des vorherg. (nr. 2.) analog.

Das Bisherige über die Sätze des I. B. ist einem grofsen Theile nach weitere Ausführung der summarischen Anmerkungen von Pfleiderer über dieses Buch, nämlich desjenigen Theils derselben, der vom 1sten bis zum 26sten Satze geht, und in der Chrestomathia geometrica, S. 299—323 wörtlich abgedruckt ist. Ueber die folgenden Sätze des I. B. geben wir hier einstweilen die Fortsetzung jener Pfleiderer'schen summarischen Anmerkungen mit den eigenen Worten des Verfassers; welche lauten, wie folgt:

Satz XXVII. XXVIII.

1. Wechselswinkel; äufserer und innerer Gegengenwinkel auf der nämlichen Seite der schneidenden; innere nicht anliegende Winkel auf einerlei Seite der schneidenden Linie.
2. Definition 31.
3. Beweis von Satz 27. durch I, 16.
4. Beweis der zwei Theile von Satz 28. aus Satz 27. mittelst
   1) I, 15. Ax. 1.
   2) Ax. 2. I, 13.
5. Beweis des 1sten Theils von Satz 28. aus I, 16. 13.
6. Beweis des 2ten Theils von Satz 28. aus I, 17. 13.

Zusätze.

1. Zwei auf einer geraden Linie in einer Ebene senkrechte gerade Linien sind parallel.
2. Zwei in einer Ebene liegende gerade Linien, auf welchen beiden eine dritte senkrecht steht, sind parallel.

Satz XXXI.

1. Auflösung mittelst I, 23. 27.
2. Auflösung mittelst I, 23. 28. 1 Thl.
3. Auflösung mittelst I, 12. 11. u. Zus. 1. oder 2.

Axiom XI.

1. Ist Converse von Satz 17.; oder dieser ist Converse von Ax. 11.: je nachdem man den einen oder den andern Satz voranschickt.
2. Beispiele directer Sätze, die als Axiome gelten; und deren Conversen bewiesen werden können, ja müfsen: Ax. 2. 8.; und Ax. 3., Congruenz gleicher gerader Linien, Winkel.

3. Simsons Erläuterung (Anmerkung zu Satz 29.) nicht befriedigend. Gründet sich auf zwei Axiome; und setzt in der gebrauchten Construction selbst das Ax. 11. voraus. Abänderung derselben, um dieses zu vermeiden. — Simsons zweite Darstellung. S. [einen besondern Pfleiderer'schen] Aufsatz §. 14. 24. — Clavius Beweis und Ergänzung §. 12. 13. u. 10. 11.

4. Zurückführung des 11. Axioms auf die Converse von I, 16.

5. Segner'sche [s. dessen Vorrede zu der ersten Ausgabe der Lorenz'schen Uebersetzung] Erläuterung dieser mittelst Ax. 8. und sinnlicher Bilder der zwei Winkel.

6. Kästner'sche [s. die dessen Anfangsgr. der Arithm. u. Geom. 4te Ausg. Satz 11. Zusätze S. 191. ff.] Erläuterung derselben gleichfalls aus Ax. 8.

7. Ax. 11. läfst sich ansehen als besagend: mit jeder gegebenen geraden Linie, als Seite, und mit jeden zwei gegebenen Winkeln, die zusammen kleiner als zwei rechte, läfst sich als anliegenden Winkeln an jener Seite ein Dreieck beschreiben; folglich behauptend: Es habe in Beziehung auf die zwei gegebenen, an der gegebenen Seite liegen sollenden Winkel keine weitere Bestimmung (Einschränkung) Statt, als die in dem 17. Satz angegebene. Vgl. Satz 22. 20.

8. Die zwei gegebenen Winkel mögen nun um so wenig, als man will, kleiner seyn als zwei rechte Winkel: so läfst sich mittelst Satz 23. und Post. auf der gegebenen geraden Linie ein Dreieck beschreiben, dessen ein an dieser Seite liegender Winkel der Summe der zwei gegebenen Winkel gleich; die zwei an ihr liegenden Winkel zusammen also gröfser als die Summe der zwei gegebenen; folglich noch weniger als diese von der Summe zweier rechten Winkel unterschieden sey.

9. Andererseits läfst sich mittelst I, 23. 12. vermöge Satz 17., Zus. 7. [Chrestom. geom. S. 309.] mit jedem gegebenen, von einem rechten so wenig, als man will, verschiedenen spitzigen Winkel, und mit jeder gegebenen geraden Linie als Hypotenuse, ein rechtwinklichtes Dreieck beschreiben.

10. Die Möglichkeit, mit einer gegebenen Seite und zwei gegebenen Winkeln ein Dreieck zu beschreiben, wird also wenigstens durch keine weitere allgemeine Determination, als die in dem 17. Satz angegebene, beschränkt (nr. 8. 9.).

11. Indem in nr. 9. die Hypotenuse immer gröfser und gröfser angenommen wird; wächst vermöge Satz 27. 28. Zus. 1. die an dem gegebenen spitzigen Winkel liegende Seite des rechtwinklichten Dreiecks ebenfalls unausgesetzt.

12. Wenn man durch hierauf sich gründende Bemerkungen als hinlänglich erläutert anerkennt: dafs zwei gerade Linien, welche mit einer dritten, auf einer Seite derselben, in einer Ebene, zwei innere Winkel machen, deren einer recht, der andere spitzig ist, auf dieser Seite verlängert zusammenstofsen: so lassen sich hieraus die übrigen zwei in Ax. 11. begriffenen Fälle mittelst I, 12. herleiten: der erste, wenn beide Winkel spitzig sind, unmittelbar; der zweite, wenn der eine Winkel stumpf ist, mittelst I. 13. Ax. 5. I, 23. 28.

13. Beweis des ersten Theils von nr. 12. mittelst wiederholter Anwendung von I, 12. und I, 19. Zus. 3. [Chrestom. geom. S. 311. hier aber §. 198, 3)] (nach Clavius); und Voraussetzung des Axioms: Eine gerade Linie, welche sich einer andern in einem Theile ihrer Länge nähert, wird auf dieser Seite verlängert fortfahren sich jener, ebenfalls auf dieser Seite verlängerten, immer mehr zu nähern, und endlich mit ihr zusammenstofsen.

14. Beweis entweder des ersten Theils von nr. 12. oder gleich des 11. Ax. in seiner ganzen Ausdehnung (nach einer andern Unterscheidung der Fälle), unter Voraussetzung des beschränkten Simson'schen Axioms: die durch zwei Punkte C, D, welche auf einer Seite der geraden Linie AB, in einer Ebene mit ihr, liegen, begränzte gerade Linie CD kann sich nicht von C an der Linie AB erstlich nähern, und alsdann gegen D zu sich wieder von ihr entfernen; oder erstlich von C an sich von AB entfernen, und alsdann gegen D zu sich ihr wieder nähern.

D. h. Wenn auf einer geraden Linie AB in zwei Punkten derselben A, B, auf einer Seite von ihr, in der nämlichen Ebene, zwei gleiche Perpendikel AC, BD errichtet werden; alsdann die gerade Linie CD gezogen, und von irgend einem Punkt derselben F, zwischen C, D, der Perpendikel FE auf AB gefällt wird: so kann FE weder kleiner, noch gröfser seyn als AC, BD.

Satz XXIX.

1. Die drei Theile dieses Satzes sind die Conversen von Satz 27. und den zwei Theilen von Satz 28.

2. Indirecter Beweis des ersten Theils mittelst I, 13. und Ax. 11.

3. Beweis der andern zwei Theile aus dem ersten mittelst

1) Satz 15. und Ax. 1.
2) Ax. 2. und Satz 13.

4. Indirecte Beweise dieser zwei Theile

1) mittelst Ax. 11. nr. 4. und I, 15.
2) Ax. 11. und I, 13.

Zusätze.

1. Wenn zwei gerade Linien parallel sind; und eine derselben auf einer dritten, beide schneidenden senkrecht steht; so ist auch die andere auf dieser dritten senkrecht (Satz 29.).

2. Eine zwei Parallelen begegnende gerade Linie, welche auf einer derselben senkrecht ist, steht auch auf der andern senkrecht (Satz 29.).

3. Eine gerade Linie, welche mit zwei Parallelen in einer Ebene liegt, und eine derselben schneidet, wird verlängert auch die andere schneiden (Post. 1. Satz 29. Ax. 9. 11.).

4. Durch einen Punkt aufserhalb einer geraden Linie kann nur eine gerade Linie mit dieser parallel gezogen werden (nr. 3.).

Satz XXX.

1. Indirecter Beweis aus Satz 29. Zus. 4.
2. Directer Beweis des Falls

1) AB und CD parallel mit EF
2) AB und EF parallel mit CD

mittelst Satz 29. Zus. 4. u. Thl. 1. 2. durch I, 27.

Zusätze.

1. Eine gerade Linie, welche einer von zwei Parallelen, in der nämlichen Ebene mit ihnen, parallel ist, ist auch der andern parallel. (Satz 30.) Vgl. XI, 9.

2. Zwei Parallelen, welche zwei andere unter sich parallele in einerlei Ebene schneiden, machen mit denselben gleiche Wechselswinkel, und gleiche Winkel auf auf den nämlichen Seiten (Satz 29. Thl. 1. 2. u. Zus. 3.). Vgl. XI, 10.

Satz XXXII.

1. Beweis des ersten Theils mittelst Satz 31. durch Satz 29., Thl. 1. 2.

2. Beweis des zweiten Theils
1) aus dem ersten Theil mittelst I, 13.
2) unabhängig von dem ersten, mittelst I, 32. aus I, 29., Thl. 1, Ax. 2. und I, 13., nr. 5. [Chrestom. geom. S. 307. hier §. 143. a.]
3. Vergleichung mit Satz 16. 17. und der Beweise von Satz 16. und 32. (Vgl. so I, 1. mit I, 22. und I, 5. 2 Thl. mit I, 13.)
4. Le Gendre's Beweis (p. 28. ss.) von Satz 5.:
1) Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zweien Winkeln eines andern, zwei und zwei, gleich sind: so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten des andern gleich. Aus Satz 26. und dem principe de l'homogeneité.
2) In einem rechtwinklichten Dreieck ist die Summe der zwei spitzigen Winkel einem rechten gleich. I, 12. 17. Zus. 1. 7. und nr. 1) (ähnlich mit dem Bew. von VI, 8.)
3) Die drei Winkel eines jeden Dreiecks sind zusammen zwei rechten gleich.
1) nr. 2)
2) I, 12. I, 15. Zus. 1. [hier §. 188.] u. nr. 2)

Zusätze.

A) In der Figur von I, 16. liegen die drei Punkte F, E, J in gerader Linie (I, 14. oder 15. Conv. 1.) [s. Fig. zu I, 16. in der Uebers. u. Fig. 81.].

B) 1. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist der Summe der Winkel jedes andern Dreiecks gleich (Satz 32. und I, 11. Zus. 2.) [Chrestom. geom. S. 306. hier §. 130.].

2. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zweien eines andern, einzeln, oder zusammengenommen, gleich sind: so sind auch ihre dritten Winkel gleich (nr. 1. u. Ax. 2. 3.).

3. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks gegeben sind: so ist auch der dritte gegeben (I, 23. 17. 15. Post. 2.).

4. Zwei Dreiecke können ihre drei Winkel, zwei und zwei, gleich haben, und doch ungleich seyn (I, 23. Ax. 11. Satz 32. Zus. 2.). Vgl. VI, 4.

5. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist: so ist die Summe der andern zwei Winkel des ersten der Summe der andern zwei Winkel des zweiten gleich (nr. 1. Ax. 3.).

6. Wenn ein Winkel eines Dreiecks ein rechter ist; so sind seine andern zwei Winkel zusammen einem rechten gleich: ist ein Winkel eines Dreiecks stumpf / spitzig;

so ist die Summe seiner andern zwei Winkel $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{gröfser}\end{matrix}\right\}$ als ein rechter (Satz 32., 2 Thl. Ax. 3. 5.).

7. Umgekehrt: Wenn ein Winkel eines Dreiecks den zwei andern zusammen gleich ist; so ist er ein rechter: ist aber ein Winkel eines Dreiecks $\left\{\begin{matrix}\text{gröfser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als die zwei andern zusammen; so ist er $\left\{\begin{matrix}\text{stumpf}\\\text{spitzig}\end{matrix}\right\}$. Vgl. III, 31. Zus.

Bew. 1) indirect durch nr. 6.

2) direct aus Satz 32., 1 Thl. u. Def. 10. 11. 12.

8. Wenn ein Winkel eines gleichschenklichten Dreiecks gegeben ist: so sind auch seine andern zwei Winkel gegeben.

Erster Fall) I, 5. 23. 32. 13. Post. 2.

Zweiter Fall) I, 32. 15. Post. 2. I, 9.

9. a) Wenn der Winkel an der Spitze eines gleichschenklichten Dreiecks ein rechter ist: so sind seine Winkel an der Grundlinie jeder die Hälfte eines rechten; ist aber der Winkel an der Spitze eines gleichschenklichten Dreiecks $\left\{\begin{matrix}\text{stumpf}\\\text{spitzig}\end{matrix}\right\}$; so ist jeder seiner Winkel an der Grundlinie $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{gröfser}\end{matrix}\right\}$ als die Hälfte eines rechten (nr. 6. u. I, 5.);

und umgekehrt (nr. 7.)

b) In einem gleichschenklichten Dreieck ist jeder Winkel an der Grundlinie die Hälfte des Aufsenwinkels an der Spitze (Satz 32. 5.).

10. Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist die zwei Drittel eines rechten (Satz 5., Zus. 7.) [Chrestom. S. 302. hier §. 59.].

11. Ein gleichschenklichtes Dreieck, dessen ein Winkel die zwei Drittel eines rechten ist, ist gleichseitig (I, 5. 32. 6.).

12. Einen rechten Winkel in 3, 6, 12, u. s. w. gleiche Theile theilen (I, 1. 9.).

13. Wird auf die Verlängerung einer Seite eines gleichseitigen Dreiecks ein seiner Seite gleiches Stück abgeschnitten, und aus dem Endpunkt dieses Abschnitts eine gerade Linie an den andern Endpunkt der anliegenden Seite des Dreiecks gezogen: so ist diese gerade Linie auf der dritten Seite des Dreiecks senkrecht (nr. 10. Satz 32. 5.).

14. Wird aus dem über seine Spitze hinaus verlängerten Schenkel eines gleichschenklichten Dreiecks

ein seinem Schenkel gleiches Stück abgeschnitten; und aus dem Endpunkt dieses Abschnittes eine gerade Linie an den andern Endpunkt des anliegenden Schenkels gezogen: so ist diese gerade Linie auf des Dreiecks Grundlinie senkrecht. (Post. 2. Satz 32. 5. Def. 10.; oder I, 5. nr. 7. oder I, 9. 27. 29. Zus. 1.)

15. Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie in einem ihrer Endpunkte ein Perpendikel errichten; ohne sie, wie Satz 11. erfordert, über diesen Punkt hinaus zu verlängern.

(1) I, 1. 3. vermöge nr. 13.

(2) Post. 3. 1. 2. zu Folge nr. 13. 14.)

16. Alle Winkel einer geradlinigten Figur machen zusammen so vielmal zwei rechte, als die Figur Seiten hat weniger zwei, (n—2) 2R.; oder so vielmal zwei rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, davon abgezogen vier rechte Winkel, nx2R—4R (Satz 32.) — Simsons Zus. 1.

17. Bemerkungen über diese Summe der Winkel, wenn einer oder einige derselben einwärts gehen.

18. Werden alle Seiten einer geradlinigten Figur, deren alle Winkel ausspringen, und zwar jede über einen ihrer Endpunkte hinaus, jede folgende aber über den mit der vorhergehenden nicht gemeinschaftlichen, verlängert: so ist die Summe der dadurch entstehenden Aufsenwinkel der Figur immer gleich vier rechten Winkeln. — Simsons Zus. 2.

Bew. 1) aus I, 13. u. nr. 16.

2) aus I, 13. 32. Ax. 2.

19. Hat die Figur einen oder mehrere einwärts gehende Winkel: so ist der Ueberschufs der Summe der Aufsenwinkel der ausspringenden

über { den Winkel, den die Verlängerung eines Schenkels des einwärts gehenden mit dem zweiten Schenkel dieses Winkels macht,

oder über { die Summe der Winkel, welche die Verlängerungen der Schenkel der einwärts gehenden mit den zweiten Schenkeln dieser Winkel machen,

vier rechten Winkeln gleich (s. zu I, 21. Zus. 1.).

Satz XXXIII.

1. Beweis mittelst Post. 1. durch I, 29. 4. 27.

2. Anhang des Satzes: „Und nun heifst das Viereck ABCD ein Parallelogramm."

a) Definition von Parallelogramm.
b) Desselben Möglichkeit
α) aus I, 33. mittelst I, 31. 3. Post. 1.
β) aus I, 31. 29. 17. Ax. 11. Oder aus I, 31. u. 29., Zus. 3.

c) Trapezium, Trapezoides: in jenem nur zwei Gegenseiten parallel; in diesem keine. Hero p. 40. Wolf p. 1328.

Zusätze.

1. Eine gerade Linie, deren zwei Punkte von einer andern geraden Linie in der nämlichen Ebene gleichweit entfernt sind, ist mit dieser parallel (I, 27. 28. Zus. 1. u. Satz 33.).

2. Andere Art die Aufgabe in Satz 31. aufzulösen (I, 12. 11. 3. Post. 1. 2. Satz 33., Zus. 1.).

3. Eine gerade Linie, deren zwei Punkte von einer andern geraden Linie in der nämlichen Ebene ungleichweit entfernt sind, schneidet (hinlänglich verlängert) diese auf der Seite des derselben näher liegenden Punkts (I, 3. 17. 33., Zus. 1. 29. Ax. 11. Oder I, 3. 16. 33., Zus. 1. 29. 17. Ax. 11.).

Satz XXXIV.

In jedem Parallelogramm sind
1. jede zwei an einer Seite liegende Winkel zusammen gleich zwei rechten (I, 29.);
2. jede zwei Gegenwinkel gleich (nr. 1. u. Ax. 3.);
3. jede zwei Gegenseiten gleich (Post. 1. I, 29. 26.);
4. jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei gleiche, congruirende Dreiecke (I, 29. 26.);
5. die zwei Diagonalen halbiren eine die andere, und theilen das Parallelogramm in vier Dreiecke, deren jede zwei einander an der Spitze entgegenstehende gleich (congruent) sind (nr. 3. u. I, 29. 26.);
6. jede in dem Parallelogramm durch den Durchschnittspunkt seiner Diagonalen gezogene gerade Linie wird in diesem Punkt halbirt; und theilt das Parallelogramm in zwei durchaus gleiche (congruente) Vierecke (nr. 5. I, 29. 26. Ax. 3. 2. ferner I, 29. u. 34., Thl. 2. 3.) Mittelpunkt der Figur.

Zusätze.

1. Zwei parallele gerade Linien sind in allen ihren Punkten gleichweit von einander entfernt (I, 12. I, 27. 28., Zus. 1. I, 34. nr. 3.).

2. Wenn auf einer geraden Linie, in einer Ebene, an einerlei Seite von jener, mehrere gleiche Perpendikel errichtet werden: so liegen die zwischen den Endpunkten jeder zwei dieser Perpendikel gezogenen geraden Linien alle in einer geraden mit der ersten parallelen Linie (Satz 33. 34., nr. 2. I, 14. Oder I, 33., Zus. 2. I, 29., Zus. 4.).

3. Ein Viereck, dessen jede zwei Gegenwinkel gleich sind, ist ein Parallelogramm (Ax. 2., I, 32., Zus. 16. I, 28., Thl. 3.).

4. Satz 33. vgl. mit Satz 34., nr. 3.

5. Ein Viereck, dessen jede zwei Gegenseiten gleich sind, ist ein Parallelogramm (I, 8. 27.).

6. Dritte Art, die Aufgabe des 31. Satzes aufzulösen (I, 22.).

7, a) Nicht jedes Viereck, dessen zwei Gegenseiten parallel und die andern zwei Gegenseiten gleich sind, ist ein Parallelogramm. (I, 26. c. [Chrestom. S. 322. hier §. 265. Satz C] Constr. Man schneide von den Schenkeln eines gleichschenklichten Dreiecks zwei gleiche Stücke ab, und ziehe die gerade Linie durch ihre Endpunkte. Oder man ziehe durch irgend einen Punkt des einen Schenkels eines gleichschenklichten Dreiecks eine Parallele mit seiner Grundlinie.)

b) Nicht jedes Viereck, welches eine seiner Diagonalen halbirt, ist ein Parallelogramm. — Beispiel: Ein Viereck mit zwei und zwei anliegenden gleichen Seiten (I, 9.).

8. Jedes Viereck, dessen Diagonalen einander wechselsweise halbiren, ist ein Parallelogramm (I, 15. 4. 27.).

9. Wenn ein Winkel eines Parallelogramms gegeben ist; so sind auch seine übrigen drei Winkel gegeben (Satz 34., nr. 1. Post. 2. I, 13.).

10. Wenn ein Winkel eines Parallelogramms ein {rechter / schiefer} ist; so sind auch seine übrigen drei Winkel {rechte / schiefe} (nr. 9.). — Daher rechtwinklichte, schiefwinklichte Parallelogramme.

11. Jedes gleichwinklichte Viereck ist ein rechtwinklichtes Parallelogramm (I, 32., Zus. 16. Satz 34., Zus. 3. 10.).

12. Wenn zwei an einander liegende Seiten eines Parallelogramms gegeben sind: so sind auch seine übrigen zwei Seiten gegeben (Satz 34., nr. 3.).

13. Wenn zwei an einander liegende Seiten eines Parallelogramms {gleich / ungleich} sind: so sind die vier Seiten desselben {gleich / nur zwei gegenüberliegende gleich.} (Satz 34., nr. 3. Ax. 2.) — Daher gleichseitige, ungleichseitige Parallelogramme.

14. Jedes gleichseitige Viereck ist ein gleichseitiges Parallelogramm (Zus. 5. 13.).

15. Vier Arten von Parallelogrammen. Def. 30—33.

16. 1) Ein Quadrat, dessen eine Seite gegeben (Satz 46.);
2) ein Rectangel, dessen zwei an einander liegende Seiten gegeben;
3) einen Rhombus, dessen eine Seite und ein Winkel gegeben;
4) ein Rhomboid, dessen ein Winkel und zwei anliegende Seiten gegeben sind,

beschreiben. (I, 11. 23. 31. 22. auf dreierlei Art nach I, 33. nr. 2.
I, 33. nr. 1.,
Satz 34., Zus. 5.)

17. Eines rechtwinklichten Parallelogramms Diagonalen sind gleich (I, 4.); eines schiefwinklichten ungleich, die durch die Spitzen seiner spitzigen Winkel gezogene ist gröfser (I, 24.).

18. Umgekehrt (I, 8. 25.).

19. Eines gleichseitigen Parallelogramms Diagonalen halbiren des Parallelogramms Winkel, durch welche sie gehen (I, 5. 29.); schneiden einander rechtwinklicht (nr. 1. I, 5. u. I, 32., Zus. 2.); und theilen das Parallelogramm in vier durchaus gleiche (congruente) Dreiecke (I, 4. oder 8.).

20. Eines ungleichseitigen Parallelogramms Diagonalen theilen die Winkel desselben, durch welche sie gehen, in ungleiche Theile (I, 18.); stehen schief auf einander (I, 25.); und von den vier Dreiecken, worein sie das Parallelogramm theilen, sind nur jede zwei an der Spitze entgegengesetzte durchaus gleich (congruent).

21. Conversen der ersten zwei Theile von Zus. 19. 20.

22. Zwei Parallelogramme, deren ein Winkel und zwei anliegende Seiten, zwei und zwei, gleich sind, sind durchaus gleich (congruent). Namentlich
1) Quadrate, deren Seiten gleich sind, sind gleich;
2) Rectangel, deren anliegende Seiten (Längen und Breiten; Grundlinien und Höhen) gleich sind, sind gleich.

3) Rhombi, deren ein Winkel und eine Seite gleich sind, sind gleich.

23. Gegensätze von Zus. 22.

1) Quadrate, deren Seiten ungleich sind, sind ungleich, dasjenige ist gröſser, dessen Seite gröſser ist (I, 3. Ax. 9.).

2) Rectangel, deren eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist, die andern Seiten um den nämlichen Winkel aber ungleich sind, sind ungleich; das, dessen Seite gröſser ist, ist gröſser.

3) Rhombi, deren ein Winkel gleich, die Seiten aber ungleich sind, sind ungleich; derjenige ist gröſser, dessen Seite gröſser ist.

4) Rhomboiden, deren ein Winkel gleich, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist, die andern Seiten um den nämlichen Winkel aber ungleich sind, sind ungleich; dasjenige ist gröſser, dessen andere Seite gröſser ist.

24. Umgekehrte Sätze von Zus. 22.

1) Die Seiten zweier gleichen Quadrate sind gleich.

2) Gleiche Rectangel von gleichen Grundlinien, Längen, haben gleiche Höhen, Breiten.

3) Gleiche gleichwinklichte Rhomben haben gleiche Seiten.

4) Wenn in zwei gleichen und gleichwinklichten Rhomboiden ein Paar Gegenseiten des einen einem Paar des andern gleich ist: so ist auch das andere Paar Gegenseiten des einen dem andern Paare Gegenseiten des andern gleich.

Anhang zu Satz 34.

1. In einem Trapezium (Viereck, dessen zwei Gegenseiten parallel sind, die zwei andern aber nicht), sind

1. jede zwei an einer der nicht parallelen Seiten liegenden Winkel zusammen zwei rechten gleich (I, 29.);

2. jede zwei Gegenwinkel sind ungleich.

Bew. indirect mittelst Ax. 2. nr. 1. und I, 28.

3. Die zwei parallelen Seiten sind ungleich

Bew. indirect mittelst I, 33.

4. Von den vier Dreiecken, worein die zwei Diagonalen das Trapezium theilen, sind die zwei an der Spitze entgegengesetzten, auf den zwei parallelen Seiten stehenden, unter einander gleichwinklicht (I, 15. 29.).

5. Keine seiner Diagonalen halbirt die andere:

(Bew. indirect mittelst nr. 4. 3. u. I, 26.)

sondern die an der gröfsern parallelen Seite liegenden Theile der Diagonalen sind gröfser als die an der klei-

ren parallelen Seite liegenden Theile desselben (I, 3. 31. 34. 29. 26.).

6. Die durch die Mitte einer Diagonale des Trapeziums mit seinen parallelen Seiten parallel gezogene gerade Linie theilt auch die andere Diagonale und die zwei nicht parallelen Seiten der Figur in zwei gleiche Theile (I, 31. 29. 26.).

Schol. in El. II. §. 240.

7. Diese ganze, durch die zwei nicht parallelen Seiten des Trapeziums begränzte gerade Linie ist der halben Summe seiner parallelen Seiten gleich; und ihr zwischen die Diagonalen fallender Abschnitt ist gleich dem halben Unterschied oben dieser parallelen Seiten (nr. 6.).

II. A. In einem gleichschenklichten Trapezium (Viereck, dessen zwei Gegenseiten parallel, und die zwei nicht parallelen gleich sind), sind

1. jede zwei an den nicht parallelen Seiten liegende Winkel gleiche schiefe Winkel: und zwar die an der gröfsern parallelen Seite liegenden spitzig; die an der kleinern stumpf (I, 3. 33. 5. 17. Zus. 4. nr. I, 1.).

2. Die zwei Diagonalen sind gleich (nr. 1. I, 4.);

3. und schneiden sich so, dafs einerseits ihre gröfsern, andererseits ihre kleineren Theile (nr. I, 5.) unter einander gleich sind (nr. 1. I, 4. 6.).

4. Von den vier Dreiecken, worein die zwei Diagonalen das Trapezium theilen, sind die zwei an der Spitze gegenüber auf den parallelen Seiten stehenden gleichschenklicht (nr. 3.); und die zwei andern durchaus gleich, congruent (nr. 3. I, 8.).

5. Wenn in einem solchen Trapezium jeder der gleichen Schenkel einer der parallelen Seiten gleich ist: so halbiren seine Diagonalen die an der andern parallelen Seite liegenden Winkel (I, 5. 29.); nicht aber die an der Seite liegenden, welcher die Schenkel gleich sind (I, 18. 29.).

B. Hingegen in einem ungleichschenklichten Trapezium (Viereck, dessen zwei Gegenseiten parallel, und die zwei nicht parallelen ungleich) sind

1. jede zwei an einer der parallelen Seiten liegende Winkel ungleich: namentlich von den an der gröfsern parallelen Seite liegenden Winkeln ist derjenige, welchen der gröfsere Schenkel des Trapeziums mit ihr macht, der kleinere und zwar spitzig (I, 3. 33. 18.); hingegen von den an der kleinern parallelen Seite liegenden Winkeln ist derjenige, welchen die gröfsere Seite mit ihr macht, der gröfsere, und zwar stumpf (nr. I, 1. u. Ax. 5.);

2. die zwei Diagonalen sind ungleich; diejenige ist gröfser, welche durch die Spitzen der kleineren Winkel an den parallelen Seiten gezogen wird (I, 5. 24. 19. mittelst der auf der kleinern parallelen Seite stehenden Dreiecke).

Satz XXXV.

1. Erklärung des Satzes.
2. Gleichheit der Dreiecke BAE, CDF, kann, aufser I, 4. auch durch I, 8. oder 26. bewiesen werden,
3. Ergänzung der übrigen Fälle } Simsons Anmerkg.
4. Gleichförmige Endigung des Beweises für die drei Fälle. } zu Satz 35.
5. Gleichförmige Führung des ganzen Beweises, nach dem 3ten Theil von nr. 2.

Satz XXXVI.

1. Erklärung des Satzes.
2. Zurückführung des Beweises auf Satz 35. mittelst Satz 33.

Sätze XXXVII. XXXVIII.

1. Erklärung der Sätze.
2. Beweise mittelst Satz 31. {35.; 36.} 34. nr. 3. u. Ax. 7.

Zusätze.

1. Zwei Dreiecke auf gleichen in gerader Linie liegenden Grundlinien und um einerlei Spitze haben gleiche Flächen.
2. Die zwei Diagonalen theilen jedes Parallelogramm in vier Dreiecke von gleicher Fläche. Die Fläche eines jeden dieser vier Dreiecke ist ein Viertel des Parallelogramms.

Zusätze zu Satz XXXV—XXXVIII.

1. Jedes schiefwinklichte {Parallelogramm; Dreieck} ist einem rechtwinklichten von {nämlicher; gleicher} Grundlinie und Höhe gleich.
2. {Parallelogramme; Dreiecke} auf einerlei oder gleichen Grundlinien und von einerlei oder gleichen Höhen sind gleich (I, 34. Zus. 1. I, 33. Zus. 1. Allgemein aus nr. 1.).

3. Parallelogramme / Dreiecke } zwischen einerlei Parallelen, oder von einerlei oder gleichen Höhen, aber auf ungleichen Grundlinien, sind ungleich; das auf der gröfsern Grundlinie ist gröfser (I, 3. Zus. 2, Ax. 9.).

4. Namentlich, wenn die gröfsere Grundlinie ein Vielfaches der kleinern ist: so ist auch das gröfsere Parallelogramm / Dreieck } das nämliche Vielfache des kleinern (Zus. 1.).

5. Zwei oder mehrere Parallelogramme / Dreiecke } von gleicher Höhe sind zusammen einem gleich hohen Parallelogramm / Dreieck } gleich, dessen Grundlinie der Summe ihrer Grundlinien gleich ist. Vgl. II, 1. 2. 3.

6. Zweier Parallelogramme / Dreiecke } von gleicher Höhe und ungleichen Grundlinien Unterschied ist einem Parallelogramm / Dreiecke } von gleicher Höhe gleich, dessen Grundlinie dem Unterschied ihrer Grundlinien gleich ist.

7. Parallelogramme / Dreiecke } von einerlei oder gleichen Höhen, oder zwischen einerlei Parallelen, und von gleichen Flächen, stehen auf gleichen Grundlinien (Zus. 3.).

Sätze XXXIX. XL.

1. Andere Conversen, unmittelbar von Satz 37. 38.

2. Nöthiger Zusatz zu Satz 40. „auf gleichen" in gerader Linie liegenden Grundlinien.

3. Anderer Ausdruck der Consequenz: Die durch der Dreiecke Spitzen gezogene gerade Linie ist mit ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie, oder mit der geraden Linie, auf welcher ihre Grundlinien liegen, parallel.

4. Beweis indirect: mittelst I, 31. 29., Zus. 3. Post. 1. durch I, 37. 38. Ax. 1. 9.

5. Ausdehnung auf Parallelogramme mittelst ähnlicher Beweisart; oder mittelst I, 34., nr. 3. u. Satz 39. 40.

6. Parallelogramme / Dreiecke } auf einerlei oder gleichen Grundlinien und von gleichen Flächen haben gleiche Höhen (I, 34., Zus. 1. I, 33., Zus. 1.).

Zusätze.

1. Ein Viereck, das jede Diagonale in zwei gleiche Dreiecke theilt, ist ein Parallelogramm (Satz 39.).

2. Ein Viereck, welches seine Diagonalen in vier Dreiecke so theilen, dafs jede zwei an der Spitze gegenüberliegenden gleich sind, ist ein Parallelogramm (Ax. 2. u. Zus. 1.).

3. Ein Viereck, welches seine Diagonalen in vier Dreiecke von gleicher Fläche theilen, ist ein Parallelogramm.

Satz XLI.

1. Erklärung des Satzes.

2. Beweis durch I, 37. u. 34. nr. 3.

3. Anderer Beweis durch I, 35. u. 34., nr. 3.

4. Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben; so ist das Parallelogramm doppelt so grofs als das Dreieck (Zus. 2. zu I, 35. u. f. I, 34.).

5. Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck zwischen einerlei Parallelen stehen oder gleiche Höhen haben; die Grundlinie des Parallelogramms aber die Hälfte ist von der Grundlinie des Dreiecks: so sind die Flächen des Parallelogramms und des Dreiecks einander gleich.

Bew. wie in Satz 42. mittelst I, 37. 41. Ax. 6., oder mittelst I, 35. 41. Ax. 7.

Satz XLII.

1. Analysis beruht auf I, 41., nr. 4.

2. Umgekehrte Aufgabe.

Satz XLIII.

1. Erklärung des Satzes.

2. Bew. durch wiederholte Anwendung des dritten Theils von I, 34.

3. Die Parallelogramme um die Diagonale sind beides in Ansehung der Winkel und der Seiten von der nämlichen Art wie das ganze Parallelogramm (I, 34., Zus. 10. 13. I, 5. 18. 29.).

4. Namentlich sind es Quadrate, wenn das ganze Parallelogramm ein Quadrat ist (II, 4.).

5. Die Ergänzungen sind unter einander gleichwinklicht (I, 15. oder 34, nr. 1.).

6. Auch ihre Seiten sind zwei und zwei gleich, wenn das ganze Parallelogramm gleichseitig ist (=

7. Namentlich in dem Fall von Satz II, 4.

8. Aber in einem ungleichseitigen Parallelogramm sind die Seiten der Ergänzungen nicht zwei und zwei gleich (nr. 2.); aufser wenn die Parallelen durch die Mitte der Diagonale gezogen werden (I, 34. nr. 6. 7.).

9. Zwei Parallelogramme können gleiche Winkel und gleiche Flächen haben, ohne dafs ihre Seiten zwei und zwei gleich sind.

10. Dieses begründet die Möglichkeit der folgenden Aufgabe.

Satz XLIV.

1. Vergleichung mit Satz 42.

2. Mittelst Satz 42. reducirt sich Satz 44. auf die Aufgabe: Ein einem gegebenen Parallelogramm gleiches und gleichwinklichtes beschreiben, dessen eine Seite einer gegebenen, von den Seiten des gegebenen Parallelogramms verschiedenen geraden Linie gleich sey.

3. Euklidische Auflösung mittelst I, 43. Analysis dieser Construction.

4. Zweite Construction mittelst I, 37. 34. EM parallel mit GA. So ist, wenn man GE, AM zieht, Dreieck AEM=GEM, oder AGM=AGE (I, 37.): daher Dreieck ABM=GBE (Ax. 3.), und Parallelogramm AM=GE (I, 34. Ax. 6.).

5. Dritte, der zweiten ähnliche Auflösung, wobei BA auf BE selbst abgeschnitten; wieder AG, und mit ihr durch E eine Parallele bis an die verlängerte BG gezogen wird. Bew. wieder mittelst I, 37. 34.

6. Vierte Auflösung: mittelst Verwandlung des gegebenen Dreiecks in ein gleiches, dessen Grundlinie dem Doppelten der gegebenen geraden Linie gleich sey; alsdenn Anwendung von I, 42.

Satz XLV.

1. Die Anwendung dieses Satzes in VI, 25. erfordert die dritte Bedingung: „unter einem gegebenen Winkel" und mit einer gegebenen Seite KF. — S. Simson's Zusatz zu Satz 45.

2. Also in der Auflösung: „Mache (Satz 44.) das Parallelogramm FH=△ABD, so dafs FKH=E, und KF= der gegebenen geraden Linie."

3. Abschneidung des Ueberflüssigen in dem Beweis, dafs KG, HL zusammen ein Parallellogramm machen. Nachdem bewiesen worden, dafs KHM, FGL gerade Li-

nien seyen, also FHNL ein Viereck sey; folgt es schlechtweg aus der Construction und I, 30. S. Simson's Anmerkung zu Satz 45.

4. Anwendung der Auflösung auf ein gegebenes Viereck.

5. Andere Auflösung: durch Verwandlung der gegebenen geradlinigten Figur in ein ihr gleiches Dreieck, das eine Seite der Figur zur Seite, oder eine Winkelspitze der gegebenen Figur zur Spitze habe; alsdann einmalige Anwendung von I, 44.

(1) Wenn die gegebene Figur ein Viereck mit ausspringenden Winkeln, oder mit einem einwärtsgehenden Winkel ist;

(2) besonderer Fall, wenn das gegebene Viereck ein Trapezium ist;

(3) wenn die gegebene Figur ein Vieleck von lauter ausspringenden Winkeln ist;

(4) für einen einwärtsgehenden Winkel, wo die durch seine Spitze mit der die Endpunkte seiner Schenkel zusammenhängenden geraden Linie gezogene Parallele

a) eine der anliegenden Seiten der Figur trifft;

b) keine derselben trifft. In diesem Fall ziehe man von der Spitze des einwärtsgehenden Winkels eine gerade Linie an des einen anliegenden ausspringenden Winkels Spitze, und mit dieser eine Parallele durch den zweiten Endpunkt dieser anliegenden Seite der Figur, bis sie den zweiten Schenkel des einwärtsgehenden Winkels schneidet. — (Klügels math. Wörterb. II. Thl.; Figur; Verwandlung der geradlinigten Figuren. S. 216. ff.)

Satz XLVI.

S. zu Satz 34. Zus. 16.

Satz XLVII.

1. Bemerkung über die Construction der zwei Quadrate auf den Seiten um den rechten Winkel.

2. Darstellung des Ganges des Beweises; besonders die Anwendung von Satz 41. betreffend.

3. (*Fig.* 199.) Zweiter Beweis mittelst Verlängerung von KH, FG bis zum Zusammenstofsen in M; Ziehung von AM; und Verlängerung von DB, EC bis an KM, FM, in R, N.

α) Bew. dafs AM Verlängerung von LA, und gleich BC sey; mittelst der Dreiecke AHM, CAB, und der Sätze I, 4. 32., Zus. 6. und I, 15. Conv.

β) Vollendung des Beweises durch I, 35. 36.

4. Drei andere Beweise, worin das Quadrat der Hypotenuse BC über derselben, auf der nämlichen Seite mit dem Dreiecke ABC beschrieben wird, durch Errichtung von Perpendikeln auf BC in B, C, und Verlängerung derselben, bis sie FG, KH in N, R treffen (*Fig.* 200.): ferner

a) (*Fig.* 200, a.) Ziehung der Parallele LJ mit BN, CR durch A; und der Linien AN, AR: Mittelst I, 41.

b) (*Fig.* 200, b.) Verlängerung von KH, FG bis zum Zusammentreffen in M; und von FB, KC bis zum Zusammenstoßen in O: Alsdann Rectgl. MA + AO = 4△ABC (I. 34., nr. 4. und Zus. 22.); und △BCO + BNF + NRM + RCK = 4△ABC (I, 34. 4. 26.); jene erstlich, alsdann diese von FMKO wegenommen, bleibt also AF + AK = BCRN.

c) ohne etwas weiter zu ziehen: (*Fig.* 200, c.) wo △RHP = NGS (I, 26.); △BNP = CBS (I, 26.) = ABS + BFN (I, 4.) = AF + HPR; daher NRCABN = AF + HRCA; NRCB = AF + AK.

Zusätze.

1. Zwei rechtwinklichte Dreiecke, deren Hypotenusen und die einen Seiten um den rechten Winkel gleich sind, sind durchaus gleich (Satz 47. I, 34. Zus. 22. 24. I, 4. oder 8.).

2. Das auf der Diagonale eines Quadrats beschriebene Quadrat ist das Doppelte von jenem.

3. Ein Quadrat beschreiben, welches zwei oder mehreren gegebenen Quadraten zusammen gleich sey.

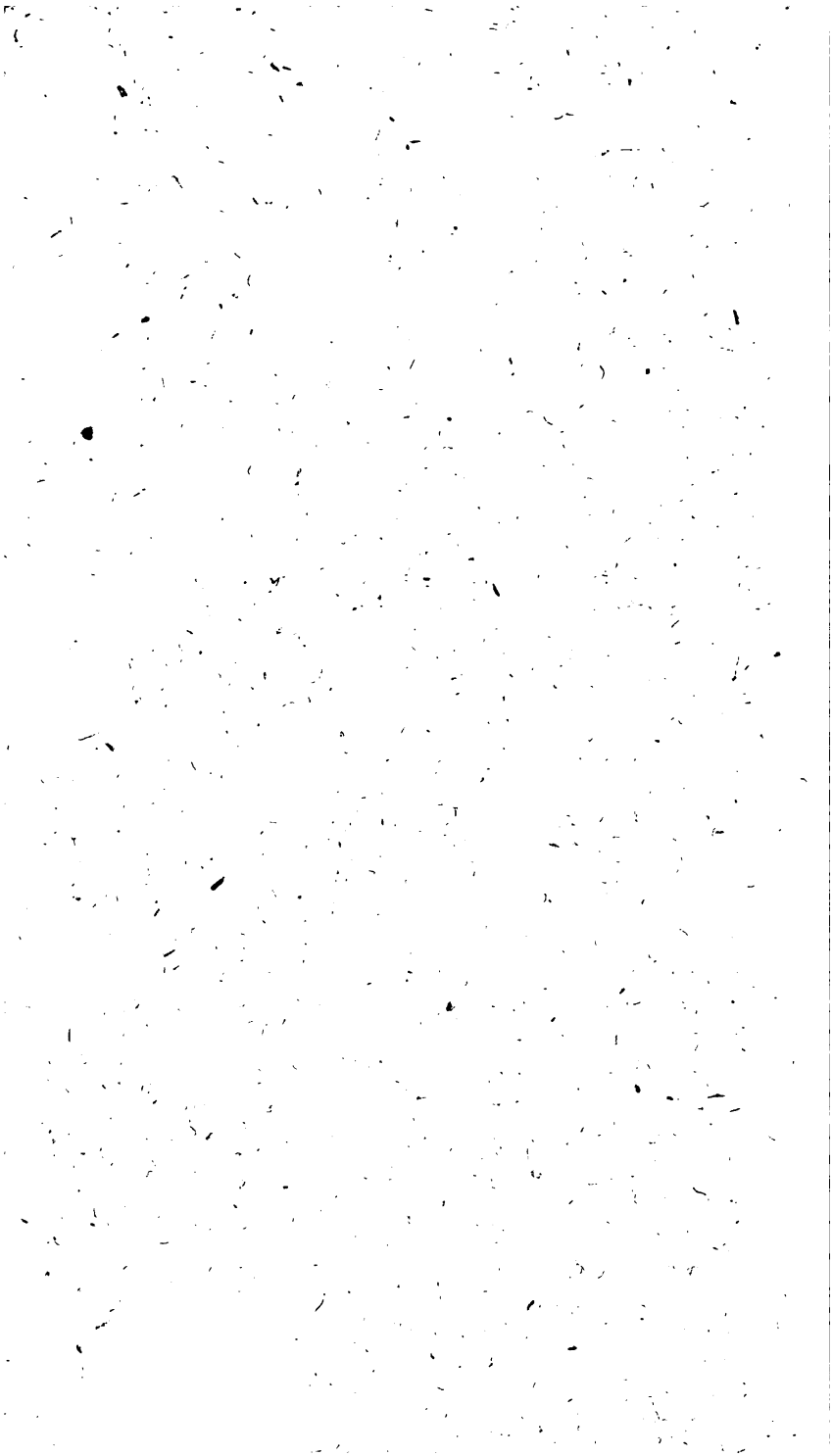
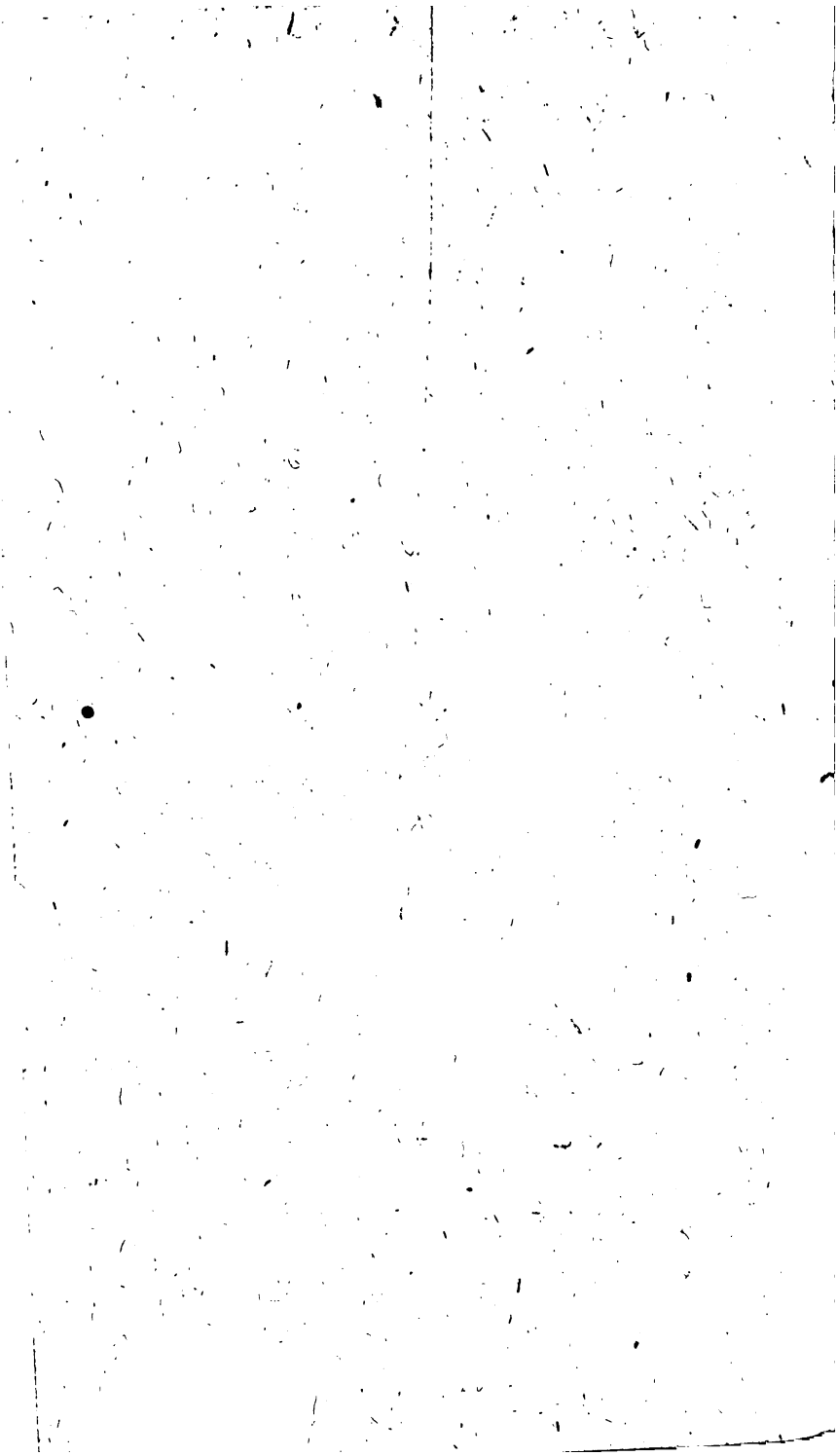
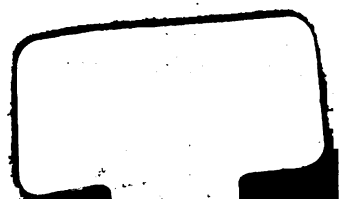
4. Ein Quadrat beschreiben, das dem Unterschied zweier gegebenen ungleichen Quadrate gleich sey.

Satz XLVIII.

1. Ist Converse von Satz 47.

2. Directer Beweis mittelst I, 11. 3. Post. 1. I, 47. Ax. 1. 3. I, 34., Zus. 24. I, 8.

3. Indirecter erst anwendbar nach II, 12. 13.

Druckfehler.

Seite	13.	Z.	9.	statt „injistit" lies: insistit
—	49.	—	19.	- - „Zwei gleich" l.: Zwei gleiche
—	78.	—	10.	- - „verlänger" l.: verlängere
—	99.	—	9.	- - „C dahin" l.: (dahin
—	125.	—	24.	- - „Es seyen wenns" l.: Es seyen, wenns
—	128.	—	15.	- - „aequlia" l.: aequalia
—	131.	—	3. v. u.	statt „wenn l.: „Wenn
—	132.	—	19.	- - „diese nicht" l.: dieses nicht
—	140.	—	5. v. u.	statt „Die" l.: Diefs
—	148.	—	19.	- - „und der concave FBC" l.: und der convexe FBC
—	225.	—	6.	- - „(ABC< d. i.) l.: (ABL d. i. <)